Министерство образования Новосибирской области
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области

«НОВОСИБИРСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора по учебной работе
«__»_______2020г.
__________С.В. Белина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
по дисциплине: МАТЕМАТИКА

для студентов специальности 09.02.05 Прикладная информатика

2020 г.

Методические указания разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее – СПО) 09.02.05 «Прикладная информатика», входящей в состав укрупненной группы специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника».

Организация-разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области «Новосибирский профессионально-педагогический колледж»

Разработчик:
Бочкарёва Д.В., преподаватель

Рассмотрено на заседании предметно-цикловой комиссии общеобразовательных и гуманитарных дисциплин
Протокол № 1 от 01 сентября 2020 г.
Председатель ПЦК ________________________ / Е.П.Виниченко /

Пояснительная записка

Сборник практических работ служит для организации практических занятий по математике в объеме 58 часов. Данное пособие предназначено для студентов 1 курса специальности «Прикладная информатика» и разработано в соответствии с рабочей программой по математике.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

Практическое занятие проводится в учебной аудитории, продолжительность занятия – 2 часа. Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе. Практические работы выполняются в специально заведённых для практических работ тетрадях.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при выполнении практических работ по дисциплине «Математика». Методические указания состоят из двадцати пяти разделов, расположенных в порядке проведения практических занятий, в каждом из которых изложены цели занятий, основные знания и умения, краткие теоретические сведения по соответствующей теме, приводятся примеры решения задач и даются задания для студентов.

В результате проведения практических занятий по дисциплине студент должен:

уметь:

- уметь выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- уметь применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- уметь решать дифференциальные уравнения:
- уметь применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

знать:

- иметь представление о роли и месте математики в современном мире, общности её понятий и представлений;
- основы линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления;
- основные численные методы решения математических задач;
- решение прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Практическая работа №1 «Выполнение действий над матрицами»

Цель работы: закрепление практических навыков выполнения действий с матрицами.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо элементов. В качестве элементов мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Пример: рассмотрим матрицу «два на три»:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Когда говорят о размерах матрицы, то сначала указывают количество строк, а только потом – количество столбцов. В рассмотренном примере матрица «два на три».

Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то матрицу называют **квадратной**, например: $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ – матрица «три на три».

Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на данное число. В данном случае – на тройку.

Транспонирование матрицы.

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пошаговый пример:

Транспонировать матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Сначала переписываем первую строку в первый столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & * & * \\ -2 & * & * \end{pmatrix}$$

Потом переписываем вторую строку во второй столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & * \\ 0 & 4 & * \\ -2 & -7 & * \end{pmatrix}$$

И, наконец, переписываем третью строку в третий столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Грубо говоря, транспонировать – это значит повернуть матрицу набок.

Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Пример:

Сложить матрицы $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы**:**

$$F+G=\begin{pmatrix}12 & -1\\ -5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 15 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+(-4) & -1+(-3)\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-4 & -1-3\\ -5+15 & 0+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4\\ 10 & 7\end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}$

$$A-H=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-4) & 5-3 & -17-(-15)\\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4 & 5-3 & -17+15\\ -1+5 & 0+7 & 10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L.

Пример:

Умножить матрицу $K=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ на матрицу $L=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$

Применим формулу :

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1c_1+b_1c_2\\ a_2c_1+b_2c_2\end{pmatrix}.$$

$$KL=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 3+1\cdot(-1)\\ 5\cdot 3+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ 11\end{pmatrix}$$

Пример:

Умножить матрицу $M=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ на матрицу $N=\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2\\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2\end{pmatrix}$

$$MN=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 9-3\cdot 6 & 2\cdot(-6)-3\cdot(-4)\\ 4\cdot 9-6\cdot 6 & 4\cdot(-6)-6\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

<u>Переходим к матрицам третьего порядка:</u>

Умножить матрицу $P=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}$ на матрицу $R=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$

Формула очень похожа на предыдущие формулы:

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1d_1+b_1d_2+c_1d_3\\ a_2d_1+b_2d_2+c_2d_3\\ a_3d_1+b_3d_2+c_3d_3\end{pmatrix}$$

$$PR=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 2+8\cdot(-3)-4\cdot 1\\ 6\cdot 2+9\cdot(-3)-5\cdot 1\\ 4\cdot 2+7\cdot(-3)-3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\ -20\\ -16\end{pmatrix}$$

Число $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$ (1) называют **определителем матрицы** размерностью n строк и n столбцов.

Определитель второго порядка есть число, получаемое следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \qquad (2)$$

Определитель третьего порядка – это число, получаемое так:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (3)$$

Запомнить эту формулу трудно. Однако существует простое правило, называемое правилом треугольников, которое позволяет легко воспроизвести выражение (3). Обозначая элементы определителя точками, соединим отрезками прямой те из них, которые дают произведения элементов определителя (рис. 1).

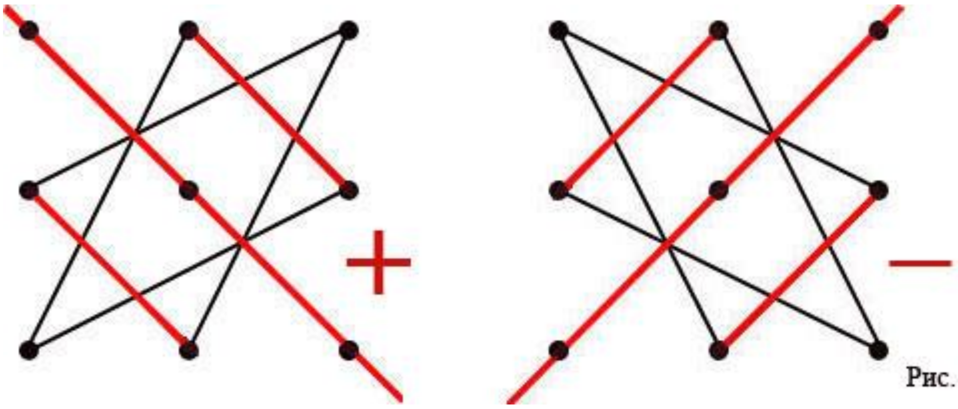


Рис. 1

Формула (3) показывает, что со своими знаками берутся произведения элементов главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых ей параллельны; с противоположными – произведения элементов побочной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, которые ей параллельны.

Пример . Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\bullet 2\bullet 4 + 1\bullet 3\bullet 2 + (-2)\bullet(-1)\bullet 3 - (-2)\bullet 2\bullet 2 - 1\bullet(-1)\bullet 4 - 0\bullet 3\bullet 3 = 24.$$

Определитель можно вычислить способом разложения по элементам первой строки. Этот способ будет рассмотрен в следующем примере.

Пример:

Найти **обратную матрицу** для матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T$, где B_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-9+8) - 5 \cdot (-18-20) + 7 \cdot (-12-15) = -2 + 190 - 189 = -1$$

Здесь определитель вычислен способом разложения по элементам первой строки.

Также не забываем, что $|B| = -1 \neq 0$, а значит, обратная матрица существует**.**

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три» $M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, и нам нужно найти девять чисел.

Подробно рассмотрим парочку миноров:

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и **является минором данного элемента**. Его нужно вычислить:

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & \boxed{3} & \boxed{4} \\ 5 & \boxed{-2} & \boxed{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Как вы, наверное, догадались, необходимо вычислить девять определителей «два на два». Ну и для закрепления – нахождение еще одного минора в картинках:

$$B=\begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & \boxed{7} \\ \boxed{6} & 3 & \boxed{4} \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-6\cdot 7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Остальные миноры попробуйте вычислить самостоятельно.

Окончательный результат:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо **СМЕНИТЬ ЗНАКИ** строго у следующих элементов:

$$M=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_*=\begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B_*^T=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+5\cdot(-38)+7\cdot 27 & 2\cdot(-1)+5\cdot 41+7\cdot(-29) & 2\cdot 1+5\cdot(-34)+7\cdot 24\\ 6\cdot 1+3\cdot(-38)+4\cdot 27 & 6\cdot(-1)+3\cdot 41+4\cdot(-29) & 6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot 24\\ 5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot 27 & 5\cdot(-1)-2\cdot 41-3\cdot(-29) & 5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Таким образом, **обратная матрица** найдена правильно.

2.Самостоятельное выполнение задания.

Даны две матрицы А и В

1 вариант

А=$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

2 вариант

А=$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Найти: 1) А+2В, 2) АВ, 3) $А^{-1}$ с проверкой.

3.Вывод практического занятия.

Практическая работа №2 «Решение систем линейных уравнений»

Цель работы: закрепление практических навыков решения систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно доказать следующий результат.

Правило Крамера. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+2\cdot 4-11=-8\neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10+28-26=-8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14+8-10=-16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26-20+22=-24.$$

1.

Итак, x=1, y=2, z=3.

МЕТОД ГАУССА

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Пример: Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$$

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-4) \\ \times(3)^{+} \\ \end{array} \left|\begin{array}{c} \times 5 \\ + \\ \times 3 \end{array}\right. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ -3y-2z=-5, \\ 4z=4. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{array}$$

2. $$\begin{cases} 3x-2y+3z=5, \\ x-5y+2z=3, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сведем ее к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-3) \\ + \\ \end{array} \left|\begin{array}{c} \times(-2) \\ \\ \\ \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ \\ + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 13 & -3 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, несложно заметить, что третье уравнения системы будет ложным, а значит, система решений не имеет.

3. $\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 4x+6y-2z=6, \\ 3x-y+2z=-1. \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$

Разделим вторую строку матрицы на 2 и поменяем местами первый и третий столбики. Тогда первый столбец будет соответствовать коэффициентам при неизвестной *z*, а третий – при *x*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 2 \\ - \; + \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right).$$

Вернемся к системе уравнений. $\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 0=0, \\ 7x+5y=5. \end{cases}$

Из третьего уравнения выразим одну неизвестную через другую и подставим в первое.

$$\begin{cases} y=1-\dfrac{7}{5}x, \\ 2x+3-\dfrac{21}{5}x-z=3, \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} y=1-\dfrac{7}{5}x, \\ z=-\dfrac{11}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

2.Решите самостоятельно систему методом :а) Крамера; б) Гаусса:

Вариант 1 а)	б)
$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1-2x_2+x_3=9 \\ x_1-4x_2-2x_3=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$
Вариант 2 а)	б)
$\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2 \\ 25x_1-2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4 \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1 \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1 \end{cases}$

3.Вывод практического занятия.

Практическая работа №3 «Решение задач с применением различных видов уравнений прямой на плоскости»

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач на применение различных видов уравнений прямой на плоскости.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$Ax + By + C = 0$,

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.** В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$- прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ $\{Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно **вектору** $\vec{n}$ (3, -1).

Решение. Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: $3x – y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A. Получаем: $3 – 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$. Итого: искомое уравнение: $3x – y – 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Решение. Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$(α_1, α_2), компоненты которого удовлетворяют условию А α_1 + В α_2 = 0 называется **направляющим вектором** прямой

Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$(1, -1) и проходящей через точку А(1, 2).

Решение. Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

1 * A + (-1) * B = 0, т.е. А = В.

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C / A = 0. при х = 1, у = 2 получаем С/ A = -3, т.е. искомое уравнение:

х + у - 3 = 0

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С≠0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$, где

$$a=-\frac{C}{A};\quad b=-\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, а = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем** , то получим

xcosφ + ysinφ - p = 0 –

нормальное уравнение прямой. Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы μ * С < 0. р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение этой прямой в отрезках: $\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$ $\quad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$; cos φ = 12/13; sin φ= -5/13; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см ^{2} .

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ab /2 = 8; a = 4; -4. a = -4 не подходит по условию задачи. Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

*Решение***.** Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$. $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}$; $\quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}$; $\quad 3x - 2y = 0.$

Угол между прямыми на плоскости

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают. Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1 (x_1 , y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Расстояние от точки до прямой

Теорема. Если задана точка $M(x_0 , y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C =0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1 :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой. Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$,

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теорема доказана.

Пример. Определить угол между прямыми: y = -3 x + 7; y = 2 x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$; tgφ = $\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; φ= p /4.

Пример. Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Решение. Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 * k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника А(0; 1), B (6; 5), C (12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Решение. Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4 x = 6 y – 6;

2 x – 3 y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b . k = $-\frac{3}{2}$.

Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1=-\frac{3}{2}12+b,$ откуда b = 17. Итого: $y=-\frac{3}{2}x+17$

.

Ответ: 3 x + 2 y – 34 = 0.

2.Самостоятельное выполнение задания.

1 вариант.

Даны вершины треугольника A(0;7), B(6;-1) и C(2;1).Найти уравнения сторон, медианы AM, высоты BD, а так же уравнение прямой AK, параллельной BC. Найти углы треугольника и угол между высотой BD и медианой AM.

2 вариант.

Даны вершины треугольника A(0;2), B(4;0) и C(1;-2).Найти уравнения сторон, медианы CM, высоты AD, а так же уравнение прямой l, параллельной BC, проходящей через точку A. Найти углы треугольника и угол между высотой AD и медианой CM.

4. Вывод практического занятия.

Практическая работа №4 «Решение задач с применением уравнений кривых второго порядка на плоскости»

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач на применение уравнений кривых второго порядка на плоскости.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид линии второго порядка:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

К кривым второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

1. Окружность

Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad (2)$$

где r - радиус окружности, a и b - координаты центра окружности.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

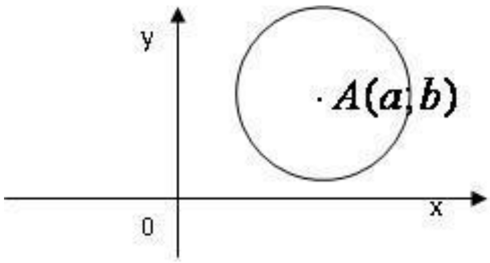


Рис. 2

2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса с центром в начале координат и с фокусами в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

где a и b - полуоси эллипса, с – полуфокусное расстояние. Коэффициенты a, b и c эллипса связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$.

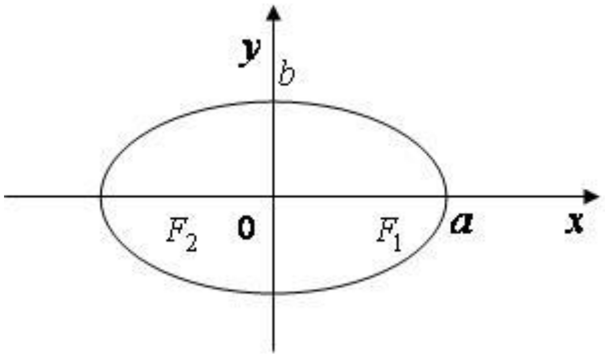


Рис. 3

Если центр эллипса находится в точке $M(x_0;y_0)$, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (5)$$

3. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Уравнение гиперболы с центром в начале координат и с фокусами в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

где a - действительная полуось,

b - мнимая полуось.

Коэффициенты a, b и c гиперболы связаны соотношением $c^2=a^2+b^2$.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы.

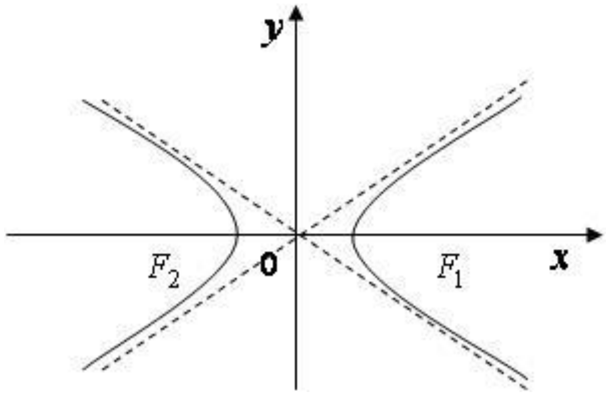


Рис. 4

Если центр гиперболы находится в точке $M(x_0 ; y_0)$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (7)$$

4. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от точки, называемой фокусом и прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат имеет вид:

$$y^2 = 2px, \qquad (8)$$

где p - расстояние между фокусом параболы и прямой линией, называемой директрисой. Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

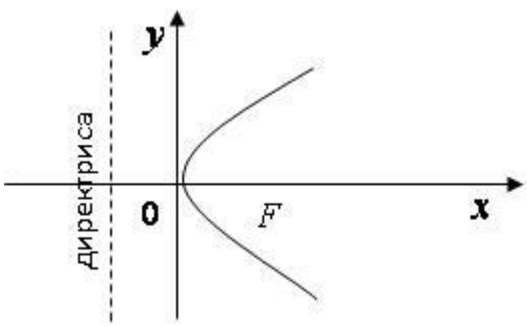


Рис. 5

Если вершина параболы находится в точке $M(x_0; y_0)$, то уравнение имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (9)$$

Задача 1. Составить уравнение геометрического места точек, равноотстоящего от оси *Oy* и точки $F(4;0)$.

Решение: Возьмем на искомой линии произвольную точку $M(x; y)$. Расстояние точки *M* от точки *F* определится по формуле расстояния между двумя точками:

$$|MF| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}.$$

Расстояние точки *M* до оси *Oy* определится:

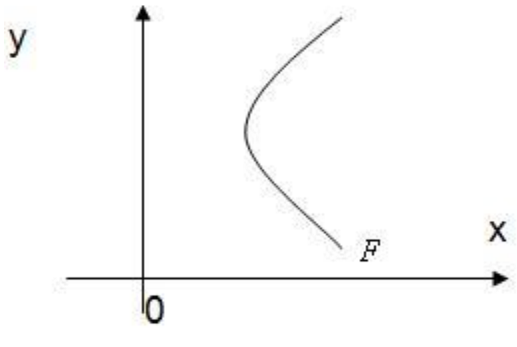
$$|MK| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}.$$

Так как по условию $|MF| = |MK|$, то искомая кривая имеет уравнение:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2} \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 = x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 8x - 16;$$

Линия, определяемая полученным уравнением $y^2 = 8(x-2)$, является параболой.



Задача 2. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки *F*(-1; 0) и до прямой x = -9 равно 1/3.

Решение: Возьмём на искомой кривой произвольную точку $M(x; y)$. Её расстояния от точки $F(-1;0)$ и прямой составляют $|MF| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}$, $|MK| = \sqrt{(x+9)^2 + (y-y)^2}$.

Из условия задачи следует:

$$\frac{|MF|}{|MK|} = \frac{1}{3}.$$

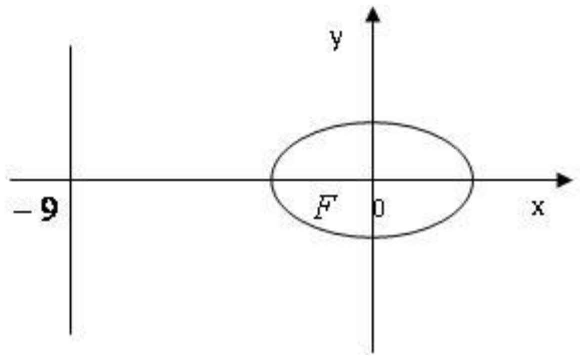
Таким образом, искомая кривая имеет уравнение:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+9)^2}} = \frac{1}{3}.$$

Приведём это уравнение к каноническому виду:

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x+9)^2} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 9y^2 = 72 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

- это уравнение эллипса с полуосями: $a = 3; \quad b = 2\sqrt{2}.$



2.Самостоятельное выполнение задания.

1 вариант

№1.Построить эллипс $x^2+4y^2 =16$, найдя его фокусы и полуоси.

№2.Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами 2a=8; 2) действительная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1,2}$.

2 вариант

№ 1.Построить гиперболу $x^2 – 4y^2 = 16$ и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

№ 2. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что 1) расстояние между фокусами равно 2c = 8, а малая полуось b = 3; 2) большая полуось a = 6, а эксцентриситет ε = 0,5.

3.Вывод.

Практическая работа №5 «Вычисление пределов числовых последовательностей»

Цель работы: закрепление практических навыков вычисления пределов числовых последовательностей.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Последовательности. Рассмотрим ряд натуральных чисел:

$1, \ 2, \ 3, \dots, \ n-1, \ n, \dots .$

Если заменить каждое натуральное число n в этом ряду некоторым числом u_n, следуя некоторому закону, то мы получим новый ряд чисел:

$u_1, \ u_2, \ u_3, \dots, \ u_{n-1}, \ u_n, \dots,$ кратко обозначаемый $\{ u_n \}$

и называемый *числовой последовательностью*. Величина u_n называется *общим членом* последовательности. Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $u_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n; эта формула называется *формулой общего члена.* Заметим, что задать числовую последовательность формулой общего члена не всегда возможно; иногда последовательность задаётся путём описания её членов (см. ниже последний пример).

П р и м е р ы числовых последовательностей:

1, 2, 3, 4, 5, … - ряд натуральных чисел ;

2, 4, 6, 8, 10, … - ряд чётных чисел;

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, … - числовая последовательность приближённых значений $\sqrt{2}$ с увеличивающейся точностью.

В последнем примере невозможно дать формулу общего члена последовательности, тем не менее эта последовательность описана полностью.

Предел числовой последовательности. Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a при увеличении порядкового номера n. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет *предел*. Это понятие имеет более строгое определение.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Это определение означает, что a есть *предел* числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n > N$ *все* члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.

Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|u_n| \le M$ для всех n. Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной*.

Теорема Вейерштрасса. *Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел* (эта теорема даётся в средней школе без доказательства).

Основные свойства пределов. Нижеприведенные свойства пределов справедливы не только для числовых последовательностей, но и для функций.

Если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ - две сходящиеся последовательности, то:

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} u_n, \quad (c \text{ - число});$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n / v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n / \lim_{n\to\infty} v_n, \text{ если } \lim_{n\to\infty} v_n \ne 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \le \lim_{n\to\infty} v_n, \text{ если } u_n \le v_n.$$

Если члены последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ удовлетворяют неравенствам

$$u_n \le v_n \le w_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a, \text{ то } \lim_{n\to\infty} v_n = a.$$

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями**.

Основные виды неопределенностей: $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$, $[0^{0}]$, $[\infty^{0}]$

Все другие выражения не являются неопределенностями и принимают какое-то конкретное конечное или бесконечное значение.

Раскрытие неопределенностей

Для раскрытия неопределенностей используют следующее:

1. упрощают выражение функции: раскладывают на множители, преобразовывают функцию с помощью формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножают на сопряженное, что позволяет в дальнейшем сократить и т.д., и т.п.;
2. замечательные пределы
3. эквивалентные бесконечно малые функции

Некоторые замечательные пределы.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,\ (e-\text{иррациональное число}\approx 2.7183\ldots);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0,\ \text{ здесь } a>0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ \text{ здесь } a>0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{1/n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan 1/n}{1/n}=1.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}-4}{x^{2}-5x+6}$

Решение. Получим неопределенность, разложим на множители числитель и знаменатель, сократим одинаковые элементы.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=-4$$

Ответ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4$

Пример . Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}$.

Очевидно, числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, то есть имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В таком случае можно вычислить предел, разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n*.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{3}{1}=3,$$

Ответ. 3

Пример. Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

Решение. Получим неопределенность и домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к иррациональности.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=$$

$$=\frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Ответ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{2}{3}$

2.Самостоятельное выполнение задания.

1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

1 вариант	2 вариант
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n+2}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^3+2n-1}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{1-n^2}+2^{\frac{1}{n}}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{2n^2+3}}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$

2. Записать первые пять членов числовой последовательности, заданной формулой n-го члена

1 Вариант $a_n=\frac{2n-1}{2}$

2 Вариант $a_n=\frac{n+1}{2}$

3. Вывод.

Практическая работа №6 «Исследование функции на непрерывность. Вычисление пределов»

Цель работы: закрепление практических навыков вычисления пределов функций.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

1.1. Понятие предела функции в точке. Основные теоремы о пределах.

Пусть функция y = f(x) определена на некотором промежутке X и пусть точка x_0 є X. Составим из множества X последовательность точек: x_1, x_2,…,x_n,…сходящихся к x_0. Значения функции в этих точках также образуют последовательность: f(x_1), f(x_2),…,f(x_n).

Число *A* называется <u>пределом</u> функции $f(\chi)$ в точке $\chi = \chi_0$, если при любых значениях χ, сколь угодно близких к числу χ_0 ($\chi \neq \chi_0$), значение функции $f(\chi)$ становится сколь угодно близким к числу *A*.

Математическое выражение предела даётся в формуле (1.)

$$\lim_{\chi \to \chi_0} f(\chi) = \mathrm{A} \Leftrightarrow \forall \chi \to \chi_0 \Rightarrow f(\chi) \to \mathrm{A}. \qquad (1)$$

1.2. Основные теоремы о пределах.

Пусть существует $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} g(\chi)$, тогда:

- Предел аргумента в точке χ_0 равен значению аргумента в этой точке

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \chi = \chi_0 \qquad (2)$$

- Если c – постоянная величина, то предел постоянной равен самой постоянной

$$\lim_{\chi\to\chi_0} c = c,\ c - const \qquad (3)$$

- Если c – постоянная величина, то постоянный множитель выносится за знак предела

$$\lim_{\chi\to\chi_0} cx = c \lim_{\chi\to\chi_0} x \qquad (4)$$

- Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = \lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) + \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi) \qquad (5)$$

- Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{\chi\leftarrow\chi_0}\left[f(\chi)\cdot g(\chi)\right] = \lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\cdot \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi);$$

(6)

- Предел отношения равен отношению пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi):g(\chi)\right] = \lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi) : \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi),\ \lim_{\chi\to\chi_0} g(\chi) \neq 0;$$

(7)

- Предел степени равен степени предела

$$\lim_{\chi\to\chi_0} \chi^m = (\lim_{\chi\to\chi_0} \chi)^m \qquad (8)$$

1.3. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции. Предел функции на бесконечности.

Функция $y = f(x)$ - называется <u>бесконечно малой</u> при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Функция $y = f(x)$ - называется <u>бесконечно большой</u> при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Если функция $y = f(x)$ бесконечно большая, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая и наоборот.

Число А называется <u>пределом</u> функции $y = f(x)$ <u>на бесконечности</u>, если при всех достаточно больших значений x разность $|f(x) - A|$ есть бесконечно малая функция

1.4. Правила раскрытия неопределённостей.

Часто встречаются случаи, когда непосредственно применить теоремы о пределах нельзя.

В этих случаях необходимо сначала раскрыть неопределенности и потом только вычислять пределы.

- В ситуации, когда числитель и знаменатель дроби стремится к нулю, говорят, что имеет место

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо:

а) числитель и знаменатель дроби разложить на множители, а затем сократить на множитель, приведший к неопределенности, при этом можно использовать:

- формулы сокращенного умножения,
- вынесение общего множителя за скобки,
- группировку,
- преобразование квадратного трехчлена с помощью дискриминанта или теоремы Виета;

т.к. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$,

- преобразование многочлена с помощью деления многочлена на $(x-x_0)$,

- умножение на сопряженное выражение, т.е. если предел содержит выражение $\sqrt{a}-\sqrt{b},$ то

путем умножения на $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ избавляемся от корней, т.к. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

б) использовать первый замечательный предел.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad (10)$$

- Если числитель и знаменатель неограниченно возрастают при x→∞, то в таком случае имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия надо разделить числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной x.

- Если имеет место неопределённость ∞^0 и 1^∞, то в этих случаях применяют второй замечательный предел.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad (11)$$

$$\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \qquad (12)$$

- Если имеют место неопределённости ∞-∞, 0-0, то в этих случаях необходимо заданную функцию привести к дробно-линейному виду, а затем использовать предыдущие правила

1.5. Понятие непрерывности функции в точке и на промежутке.

Функция называется непрерывной в точке, если существует предел функции в этой точке, и он равен значению функции в этой точке:

$$C = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (13)$$

Функция непрерывна на промежутке, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Все основные элементарные функции – постоянная, показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрическая, обратные тригонометрические непрерывные на своих областях определения.

Функция f(x) непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и $f_1(x)/f_2(x)$ будут также непрерывны в точке x_0 (для дроби при условии, что $f_2(x_0) \neq 0$).

Решение задач

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)$

Решение.

Используя теоремы о пределах и формулы (2)-(5) получим $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3) = \lim\limits_{x\to 2}(2x) + \lim\limits_{x\to 2} 3 = 2\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 3 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}$

Решение.

Для того, чтобы вычислить предел функции в точке подставим значение аргумента функции в этой точке, т.е. вместо x подставим единицу: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{1^2+2^1}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{3}{2}$

Пример 3. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

Решение.

Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используя правило раскрытия неопределённостей (а) воспользуемся формулами сокращённого умножения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left[\frac{4}{0}\right]=\infty .$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x}{3x^5-2}$.

Решение

Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Используя правило раскрытия неопределённостей, разделим каждое слагаемое почленно на x^5:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x}{3x^5-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{x}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}-\frac{2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{3-\frac{2}{x^5}}=\left[\frac{1+0}{3-0}\right]=\frac{1}{3}$$

<u>Пример 5</u> Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$

Решение.

Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Решим уравнения числителя и знаменателя и разложим трёхчлены на множители:

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)(x+\frac{1}{4})}{3(x-3)(x+\frac{1}{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{4x+1}{3x+1}=\frac{4\cdot 3+1}{3\cdot 3+1}=1{,}3$$

$$4x^2-11x-3=0,\quad D=169=13^2,\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{1}{4}$$
$$3x^2-8x-3=0,\quad D=100=10^2,\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{1}{3}$$

<u>Пример 6</u>. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

Решение

Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Домножим и числитель, и знаменатель на сопряжённый

множитель:

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)\cdot(3+\sqrt{x+3})}{(3-\sqrt{x+3})\cdot(3+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(3+\sqrt{x+3})}{9-(x+3)}=\lim_{x\to 6}(3+\sqrt{x+3})=6$$

<u>Пример 7</u> Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x+4}{x^3-3x^2+4}$

Решение

Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Произведём деление многочленов столбиков на (x-2):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}=$$

$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-3x+2)}{(x-2)(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-2)}=\frac{2^2-3\cdot 2+2}{2^2-2-2}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{rl}
-\ x^3-5x^2+8x-4 & \big|\ x-2 \\
x^3-2x^2 & \big|\ x^2-3x+2 \\
\hline
-\ -3x^2+8x & \\
-3x^2+6x & \\
\hline
-\ 2x-4 & \\
2x-4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
-\ x^3-3x^2+4 & \big|\ x-2 \\
x^3-2x^2 & \big|\ x^2-x-2 \\
\hline
-\ -x^2+4 & \\
-x^2+2x & \\
\hline
-\ -2x+4 & \\
-2x+4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

<u>Пример 8.</u> Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,4x}$

Решение.

Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применим первый замечательный предел, формулы (9), (10) получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\frac{tg\,4x}{4x}\cdot 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$$

Пример 9. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+1}\right)^{3x-1}$

Решение.

Имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. Применим второй замечательный предел формулу (12): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x+1}\right)^{3x-1} = \left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1-1-2}{2x+1}\right)^{3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+1}+\dfrac{-1-2}{2x+1}\right)^{3x-1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{2x+1}\right)^{3x-1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-3}}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)\cdot(3x-1)}{\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x-1}{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}} =$$

$$= e^{\frac{3}{-\frac{2}{3}}} = e^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^9}}$$

2.Самостоятельное выполнение задания.

1.Установить являются ли функции непрерывными или разрывными. Найти точки разрыва для функций имеющих разрыв.

Вариант 1	Вариант 2
1)y = $\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;	1)y = $\frac{4}{x-2}$;
2)y = 2^{x-2}	2)y = $3^{\frac{1}{x}}$

2.Вычислить пределы

Вариант 1	Вариант 2
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+x-6}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+x-6}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2+1}\right)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{5x}$

3.Сделать вывод.

Практическая работа №7 «Нахождение производных функций»

Цель работы: закрепление практических навыков нахождения производных функций.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Определение: Производной функции f(x) (f'(x)) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1.$C'=0$

2. $(u+v)'=u'+v'$

3. $(uv)'=u'v+v'u$

4. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$, где C=const

5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

6. Производная сложной функции:

$f'(g(x))=f'(g)\cdot g'(x)$

2. Примеры.

1. Найти значение производной функции:y=$3x^2+2^x$-4x+8.

Решение:

По правилу нахождения производной алгебраической суммы функций (формула 2): $y'=(3x^2+2^x-4x+8)'=(3x^2)'+(2^x)-(4x)'+(8)'=3\cdot 2x+2^x\cdot \ln 2-4\cdot 1+0=6x+2^x\cdot\ln 2-4$

2. Найти значение производной функции: y = $x^6(\sin x+4)$.

Решение:

Функция представляет собой произведение двух множителей: u=x^6, $v=\sin x+4$. По формуле 3:

$y'=(x^6(\sin x+4))'=(x^6)'(\sin x+4)+x^6(\sin x+4)'=6x^5(\sin x+4)+x^6\cdot\cos x$.

3. Найти значение производной функции: y= $\frac{3x-5}{4e^x-3}$.

Решение:

Функция представляет собой частное двух выражений: u= $3x-5$, $v=4e^x-3$. По формуле 5: $y'=\left(\frac{3x-5}{4e^x-3}\right)=\frac{(3x-5)'\cdot(4e^x-3)-(4e^x-3)'\cdot(3x-5)}{(4e^x-3)^2}=\frac{3(4e^x-3)-4e^x(3x-5)}{(4e^x-3)^2}$

4. $y=\sin(4x-\frac{\pi}{6})$ в точке $x_0=\frac{\pi}{12}$

Решение. Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции (формула 6):

$$y'=\left(\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\right)'=\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)'\cdot\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

5. Если $y=3\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y'=(3\cdot\frac{1}{\sqrt{x}})'=3(x^{-1/2})'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

6. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

7.Если $y = \ln x \cdot \cos x$, то $y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x\cdot\cos x - \ln x \cdot \sin x$.

8. $y=\frac{x^3}{\cos x}$, $y'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}$.

2. Выполнить самостоятельно:

№ варианта	Найти производную функции y:	№ варианта	Найти производную функции y:
1	1. y=$6x^5$-$3\cos x + 8x - 9$ 2. y=e^x(5x+7) 3. y=$\frac{\ln x^2}{\sin x}$ 4. y=3^{x^3} 5. y=$\sqrt{\sin 2x}$	2	1. y=-$6x^4$-$7\cos x + x - 11$ 2. y=e^{x-3}(x+17) 3. y=$\frac{6-2\ln x}{\sin 2x}$ 4. y=9^{10-x^5} 5. y=$\sqrt{\sin(6x-5)}$

3.Сделать вывод.

Практическая работа №8 «Нахождение производных второго порядка»

Цель работы: закрепление практических навыков нахождения производных второго порядка функций.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Понятие производных высших порядков

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Найдем её производную $y' = f'(x)$. Рассматривая $f'(x)$ как новую функцию, продифференцируем её:

$$(y')' = (f'(x))'$$

Полученную новую производную называют второй производной от функции $y = f(x)$. Вторую производную обозначают так:

$y'' = f''(x)$ или $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Аналогично находится производная третьего, четвертого, и т.д. n-го порядка. Третья производная обозначается так:

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Четвертая:

$$(y''')' = y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Производной n – го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Решение примеров

1. Найти производную второго порядка:

$$y = x^3 + 7x^4 - 3x + 4.$$

Решение. Сначала найдем производную первого порядка:

$$y' = 3x^2 + 7 \cdot 4x^3 - 3 = 3x^2 + 28x^3 - 3.$$

Теперь найдем производную от производной первого порядка. Это и будет производная второго порядка:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 28x^3 - 3)' = 3 \cdot 2x + 28 \cdot 3x^2 - 0 = 6x + 84x^2.$$

Ответ. У”=6x + 84x²

2. Найти производную второго порядка от функции $y(x) = \sin^3 x$

Решение. Находим первую производную как производную сложной функции:

$$y'(x) = \left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

Вторую производную находим как от произведения, предварительно вынеся по правилам дифференцирования коэффициент 3 за знак производной. Также будем учитывать, что первый множитель - $\sin^2 x$ - есть сложной функцией:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(3\sin^2 x \cos x\right)' = 3\left(\sin^2 x \cos x\right)' =$$

$$= 3\left[\left(\sin^2 x\right)' \cos x + \sin^2 x \left(\cos x\right)'\right] =$$

$$= 3\left[2\sin x \cdot (\sin x)' \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)\right] =$$

$$= 3\left(2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - \sin^3 x\right) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$$

Ответ. $y''(x) = 3\left(\sin 2x \cos x - \sin^3 x\right)$

2. Выполнить самостоятельно:

Найти производную второго порядка заданных функций

Вариант 1	Вариант 2
1)y = x^3	1) y = x^4
2)y = $\cos^2 x$	2) y = sinx
3) y = $\ln(3x^2 - 2x + 5)$	3) y = $(5x + 2)^4$
4) y = $\sqrt{1 + \cos x}$	4) y = 10^{5-3x}
5) y = 2^x	5) y = $\sqrt{1 + \sqrt[5]{x}}$

3.Вывод.

Практическая работа №9 «Геометрический смысл производной»

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач с применением знаний геометрического смысла производной.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Геометрический смысл производной.

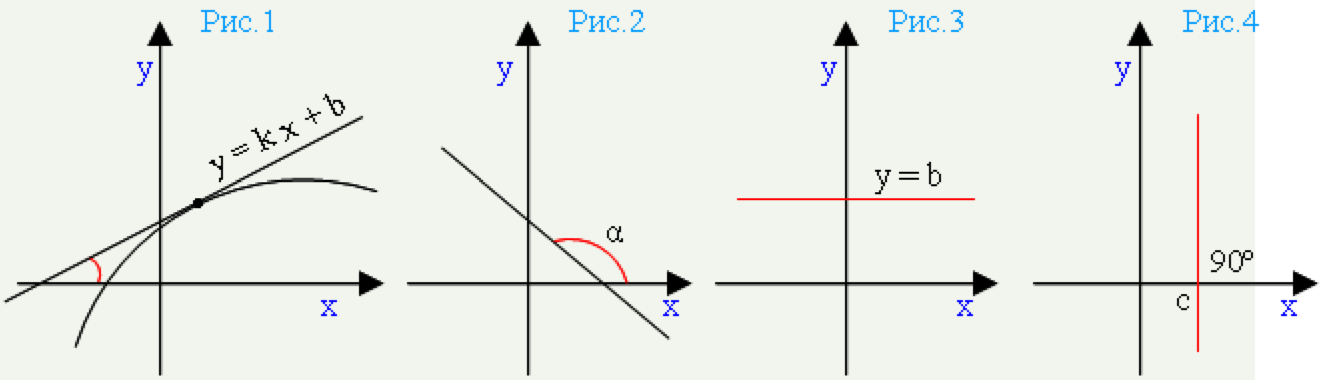
Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку (x_o; $f(x_o)$) и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.

Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является **угловым коэффициентом** этой прямой.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс:

$$\boldsymbol{k = \mathrm{tg}\ \alpha}$$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона прямой** (рис.1 и 2).



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид y = b (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90º (π/2), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_o)$.
2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_o)$.
3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f'(x_o)$ в уравнение касательной и решить его.

Пример: Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Следуем алгоритму.

1) Точка касания x_o равна 2. Вычислим $f(x_o)$:

$f(x_o) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x$.

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_o)$:

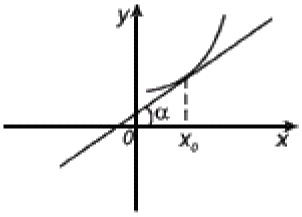
$f'(x_o) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$.

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_o = 2$, $f(x_o) = 1$, $f'(x_o) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

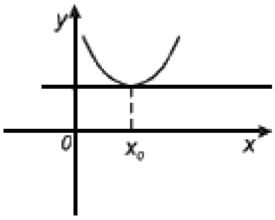
$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7$.

Ответ: y = 4x – 7.

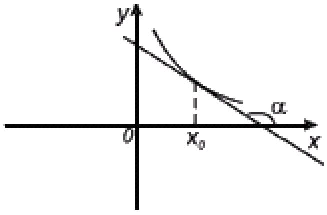
Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$:

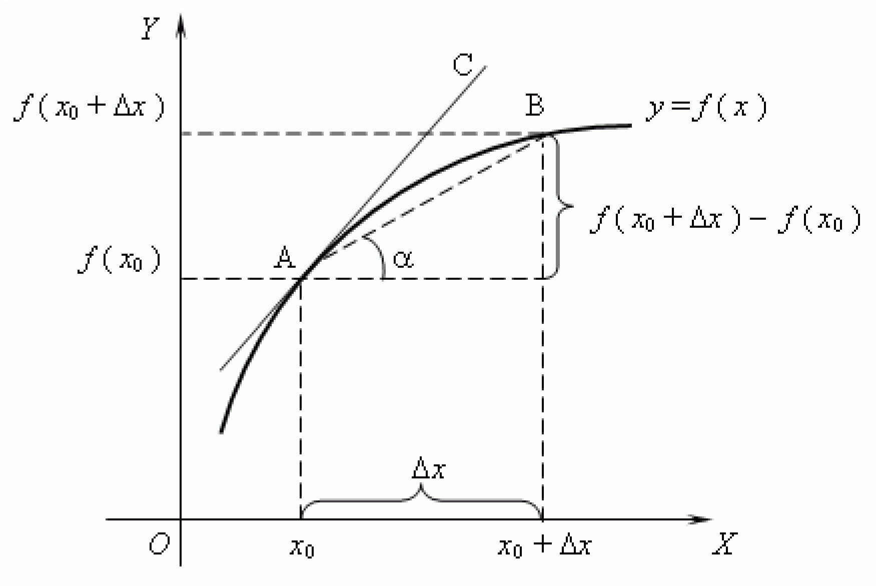


Рис. 1

Из рис.1 видно, что для любых двух точек *A* и *B* графика функции: $\Delta x f(x0+\Delta x)-f(x0)=tg\alpha$, где α - угол наклона секущей *AB*. Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку *A* и двигать по направлению к ней точку *B*, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая *AB* приближается к касательной *AC*.

Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке *A*. Отсюда следует:

производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

В этом и состоит геометрический смысл производной.

Признаки возрастания и убывания функции:

- Если **производная** функции **положительна** в каждой точке некоторого интервала, то **функция возрастает** на этом интервале.
- Если **производная** функции **отрицательна** в каждой точке некоторого интервала, то **функция убывает** на этом интервале.

Точки экстремума.

Точки экстремума — это точки, в которых **возрастание функции сменяется убыванием** или наоборот. На графике они выглядят, как точки перегиба функции. Пик — это максимум, впадина — это минимум.

- Если точка является точкой экстремума функции *f(x)* и в этой точке существует производная , то она равна нулю.
- Если в точке производная меняет знак с **плюса на минус,** то точка является точкой **максимума.**
- Если в точке производная меняет знак с **минуса на плюс**, то точка является точкой **минимума**.

Рассмотрим несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание.

Найти промежутки монотонности функций:

1) $y = x^3 - 3x^2$

а) область определения $D(y): x \in R$,

б) найдем первую производную: $y' = 3x^2 - 6x$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $3x^2 - 6x = 0$, $x = 0$ и $x = 2$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$((2;+\infty)$
$y'(x)$	+	0	-	0	+

$y(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

Итак, в промежутках $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$ функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает, в промежутке $x \in (0;2)$ убывает.

2) $y = -x^3$

а) область определения $D(y): x \in R$,

б) найдем первую производную: $y' = -3x^2$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $-3x^2 = 0$, $x = 0$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	-
$y(x)$	$\downarrow$		$\downarrow$

Функция $y = -x^3$ убывает на всей области определения.

3) $y = x^2 - 5x + 6$.

а) область определения $D(y): x \in R$,

б) найдем первую производную: $y' = 2x - 5$,

в) найдем критические точки: $y' = 0$; $2x - 5 = 0$; $x = 2{,}5$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;2{,}5)$	2,5	$(2{,}5;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	+
$y(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$

Функция $y = x^2 - 5x + 6$ возрастает на промежутке $x \in (2{,}5;+\infty)$, убывает на промежутке $x \in (-\infty;2{,}5)$

Самостоятельно найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 27x$.

2. Выполнить самостоятельно:

1 . Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

Вариант №1	Вариант №2
1. $y=x^3-3x^2+4$ 2. $y=\frac{5-2x}{x^2-4}$	1. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$ 2. $y=\frac{x}{x^2-1}$

2.Составить уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой x=2

1 вариант	2 вариант
$y = x^2 - 2x$	$y = \frac{x^2}{2} + 2x$

3.Найти угол наклона к оси Ox касательной, проведённой к кривой:

1 вариант $y = \sin x$ в точке $x = 2\pi/3$

2 вариант $y = \mathrm{tg}\, x$ в точке $x = \pi/3$

3.Вывод.

Практическая работа №10 «Исследование функций и построение графиков»

Цель работы: закрепление практических навыков построения графиков функций с помощью производной.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Общая схема исследования функции

- Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
- Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
- Найти точки пересечения с осями координат.
- Установить, является ли функция чётной или нечётной.
- Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
- Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
- Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
- Найти наклонные асимптоты функции.
- Построить график функции.

Асимптота – это прямая, к которой бесконечно близко приближается график функции, и график при этом бесконечно удаляется от начала координат. Знание уравнения асимптоты функции может быть полезно при анализе функции и построении ее графика. В зависимости от поведения аргумента асимптоты разделяются на вертикальные, горизонтальные и наклонные. Вертикальная асимптота – это вертикальная линия вида x=α, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Точки разрыва функции и границы области определения являются основанием для нахождения вертикальных асимптот. Горизонтальная асимптота – горизонтальная прямая линия вида x=α, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \alpha$. Наклонная асимптота – прямая вида y=kx+b; для существования наклонных асимптот, необходимо одновременное существование пределов $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.

Пример 1.Построить график функции $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

Решение.

1. Область определения функции D(y) = (-∞;0)U(0;∞).

2. Функция не является четной или нечетной.

3. Найдем точки пересечения графика с осью *OX*; имеем $\frac{x^3+4}{x^2}=0$; $x=-\sqrt[3]{4}$.

4. Точки разрыва x=0, причем $\lim\limits_{x\to\pm0} y=+\infty$; следовательно, x=0 является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

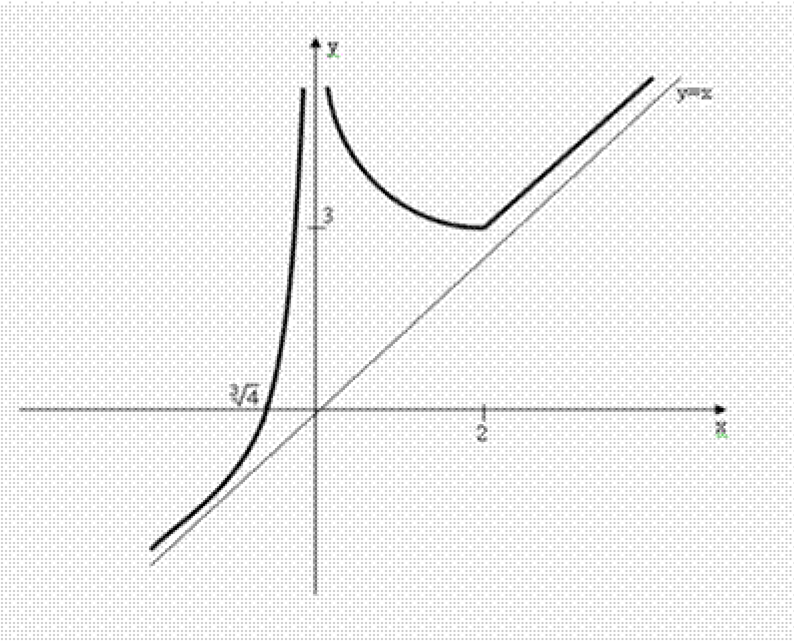
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=x$.

5. Найдем экстремум функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем $y'=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$. Существует единственная критическая точка x=2. В промежутках $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ $y'>0$, следовательно, функция возрастает; в промежутке $x\in(0;2)$ $y'<0$, функция убывает. Далее, находим $y''=\frac{24}{x^4}$; $y''(2)>0$, следовательно, x=2 – точка минимума $y_{min}=3$.

6. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Так как y’’>0 (x≠0), то график функции всюду вогнут. Точек перегиба кривая не имеет.

Строим график функции.



2. Выполнить самостоятельно:

Вариант№1	Вариант№2
Исследовать функцию и построить график:	Исследовать функцию и построить график:
1.y=x^3-3x^2+4	1.y=$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$
2.y=$\frac{5-2x}{x^2-4}$	2.y=$\frac{x}{x^2-1}$
3.y=$\frac{x^2}{x^2-1}$	3.y=$\frac{x^3}{x^2-1}$

3.Вывод.

Практическая работа №11"Интегрирование простейших функций"

Цель работы: закрепление практических навыков нахождения неопределённых интегралов.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Неопределённый интеграл и непосредственное интегрирование.

Определение первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных некоторой функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается как

$$\int f(x)\,dx.$$

Таким образом, если F - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла

В приведенных ниже формулах f и g - функции переменной x, F - первообразная функции f,

a, k, C - постоянные величины.

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Непосредственное интегрирование – это нахождение неопределенных интегралов с использованием таблицы интегралов и свойств неопределенного интеграла.

Таблица интегралов

1	$\int 0 \cdot dx = C$	11	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$.	13	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	14	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18	$\int \sqrt{x^2+\alpha} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	19	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \frac{x+\pi/2}{2}\right\rvert + C$

Пример 1

Вычислить $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.

Решение.

$$\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+C=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x}}{4}$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение.

Преобразуя выражение и применяя формулу для интеграла степенной функции, получаем

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\frac{3dx}{\sqrt[3]{x}}+\int\frac{2dx}{\sqrt{x}}=3\int x^{-\frac{1}{3}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2}+4x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}+4\sqrt{x}+C.$$

Пример 3

Вычислить $\int\frac{4dx}{2+3x^2}$.

Решение.

Используем табличный интеграл $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. Тогда

$$\int\frac{4dx}{2+3x^2}=4\int\frac{dx}{3\left(\frac{2}{3}+x^2\right)}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+x^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}+C=\frac{4}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 4

Вычислить $\int\frac{\pi dx}{\sqrt{\pi-x^2}}$.

Решение.

Воспользовавшись табличным интегралом $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, находим

$$\int \frac{\pi dx}{\sqrt{\pi - x^2}} = \pi \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\pi}\right)^2 - x^2}} = \pi \arcsin\frac{x}{\sqrt{\pi}} + C.$$

Пример 5

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$ без использования замены переменной.

Решение.

Используя формулу двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sec^2 x dx + \frac{1}{4}\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg} x - \frac{1}{4}\operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{4}\left(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x\right) + C.$$

Основные приемы интегрирования

Для вычисления неопределенных интегралов нет такого четкого алгоритма, как для вычисления производных. Кроме того, следует иметь в виду, что бесконечно много интегралов от элементарных функций не выражаются через эти элементарные функции, а представляют собой так называемые специальные функции. Поэтому, вычисление неопределенных интегралов скорее искусство, чем работа по алгоритму. Однако два общих приема все-таки имеются.

Замена переменных.

Пусть надо вычислить $\int f(x)dx = F(x)$. Сделаем **замену переменных** $x = \varphi(t)$, так что $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Пусть нам каким-то образом удалось вычислить $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$. Тогда имеет место формула

$$\int f(x)dx = G\left(\varphi^{(-1)}(x)\right) + C.$$

Пример 6.

$\int e^{\sin x}\cos x dx$ имеет смысл перейти к переменной (сделать подстановку) $t = \sin x$. Выражаем все множители подынтегрального выражения через переменную t:

$x = \arcsin t;\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$; в результате $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^t \sqrt{1-t^2}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$ (возвращаемся к исходной переменной) $= e^{\sin x} + C$. Другие примеры: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}$. Подынтегральная функция содержит два множителя, ни один из которых не является производной другого, поэтому подводить их под знак дифференциала бесполезно. Попытаемся ввести новую переменную, такую, чтобы корни извлеклись: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})} = \left|\begin{matrix} x-5 = t^6;\ t = \sqrt[6]{x-5}; \\ x = t^6 + 5;\ dx = 6t^5 dt \end{matrix}\right| =$

$$\int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} =$$

$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\left(\sqrt[6]{x-5} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x-5}\right) + C$$

Пример 7.

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Здесь подынтегральная функция состоит из единственного множителя; можно опять попытаться сделать такую замену переменной, чтобы корень извлёкся. Структура подкоренного выражения подсказывает эту замену: $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$, $a > 0$):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t;\ dx = a\cos t dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t \end{matrix}\right| = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$$

. Интеграл свёлся к интегралу от квадрата косинуса. При интегрировании чётных степеней синуса и косинуса часто применяются формулы, выражающие $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$ через косинус двойного угла: $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2};\ \cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$. Поэтому

$$a^2 \int \cos^2 t \cdot dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos 2t \cdot d2t\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C = \left|\begin{matrix} \sin t = \dfrac{x}{a};\ \cos t = \\ \sqrt{1-\sin^2 t} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 8.

$$\int\frac{\sqrt{\ln x+6}}{x}dx=\left|\begin{matrix} t= & \ln x+6 \\ dt=t'\cdot dx & =(\ln x+6)'dx=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right|=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2(\ln x+6)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Интегрирование по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - две функции. Тогда имеет место формула

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

Пример 9.

$$\int x\cos x dx=\left|\begin{matrix} u=x & du=u'(x)\cdot dx=x'dx=dx \\ dv=\cos x dx & v=\int\cos x dx=\sin x\end{matrix}\right|=x\cdot\sin x-\int\sin x dx=$$

$$=x\cdot\sin x-(-\cos x)+C.$$

Пример 10.

$$\int(3x-2)e^{2x-5}dx=\left|\begin{matrix} u=3x-2 & du=u'(x)\cdot dx=3dx \\ dv=e^{2x-5} & v=\int e^{2x-5}dx=\frac{1}{2}e^{2x-5}\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3}{2}\int e^{2x-5}dx=\frac{1}{2}(3x-2)e^{2x-5}-\frac{3e^{2x-5}}{4}+C.$$

Пример 11.

$$\int\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x & du=u'(x)\cdot dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & v=\int dx=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C.$$

Полиномы и дробно-рациональная функция

Выражение

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n,\quad a_0\neq 0$$

называется **полиномом** или **многочленом** степени *n* от переменной *x*. Число *b* (вещественное или комплексное) называется **корнем** полинома $P_n(x)$, если $P_n(b)=0$.

Всякий полином может быть представлен в виде

$$P_n(x)=a_0(x-b_1)^{k_1}\dots(x-b_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r},$$

где сомножитель вида $(x-b)^k$ соответствует вещественному корню *b* кратности *k*, а сомножитель вида $(x^2+px+q)^{\lambda}$ - паре комплексно-сопряженных корней кратности l. Отметим, что $k_1+\dots+k_m+2(\lambda_1+\dots+\lambda_r)=n$.

Функция вида $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - полиномы соответствующих степеней, называется **дробно-рациональной функцией или дробью**. Если *m* < *n*, то дробно-рациональная функция называется **правильной.**

Теорема 1. Пусть $Q(x)/P(x)$ есть правильная рациональная дробь и *b* есть **вещественный** корень *P*(*x*) кратности *k*, то есть $P(x)=(x-b)^k\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A}{(x-b)^k}+\frac{\psi(x)}{(x-b)^{k-s}\varphi(x)},$$

где $A=Q(b)/\varphi(b)$, $s\ge 1$, а $\psi(x)$ - полином такой степени, что второе слагаемое есть правильная рациональная дробь.

Теорема 2. Пусть $Q(x)/P(x)$ есть правильная рациональная дробь и *b* есть **комплексный** корень *P*(*x*) кратности l, то есть $P(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-s}\varphi(x)},$$

где $s\ge 1$, а $\psi(x)$ - полином такой степени, что второе слагаемое есть правильная рациональная дробь.

Интегрирование дробно-рациональных функций

Пусть $Q(x)/P(x)$ есть правильная рациональная дробь, у которой $P(x) = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x-b_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} (x^2 + p_j x + q_j)^{\lambda_j}$. Тогда, согласно предыдущим теоремам, ее можно представить в виде

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \frac{D_{il}}{(x-b_i)^l} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{\lambda_j} \frac{M_{js}x + N}{(x^2 + p_j x + q_j)^s},$$

которое называется разложением правильной рациональной дроби на **простейшие**.

Для нахождения коэффициентов разложения стандартным является следующий алгоритм:

1. Написать разложение рациональной дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами.

2. Привести правую часть получившегося выражения к общему знаменателю, раскрыть скобки и собрать члены с одинаковыми степенями x.

3. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в знаменателях получившейся и исходной дроби.

4. Решить получившуюся систему линейных алгебраических уравнений и найти все неопределенные коэффициенты.

В результате интеграл $\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx$ распадется на сумму интегралов следующих типов:

$$\int \frac{dx}{x-b}, \quad \int \frac{dx}{(x-b)^k}, \ k > 1, \quad \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \ \text{и} \ \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^\lambda}, \ \lambda > 1.$$

Все они вычисляются в явном виде. Имеем

$$\int \frac{dx}{x-b} = \ln|x-b|, \quad \int \frac{dx}{(x-b)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-b)^{k-1}}.$$

Запоминать явные выражения для интегралов двух последних типов не надо.

2.Самостоятельное выполнение заданий

Найти неопределенный интеграл:

№1	№2	№3
1. $\int \frac{\sqrt[5]{ctgx}dx}{sin^2x}$ *2.* $\int (3{,}8sinx - 5cos\frac{x}{2})dx$ *3.* $\int xe^{3x}\,dx$ 4. $\int sin\frac{x}{8}dx$ 5. $\int (8x+5)^{10}\,dx$	1. $\int cos\frac{x}{8}dx$ 2. $\int (5^x+12)^5 5^x\,dx$ 3. $\int \frac{xcos-3x^2-1}{x}\,dx$ 4. $\int \frac{dx}{xln^2x}$ 5. $\int \mathrm{x}\cdot \sin\,(5x-1)\,dx$	1. $\int 7^x cos7^x dx$ 2. $\int (x+4)cosxdx$ 3. $\int sin5x\;\,dx$ 4. $\int \frac{xe^x+2x^2-1}{5x}\,dx$ 5. $\int 4sin^2\frac{x}{6}\;cos\frac{x}{6}$dx

3.Вывод.

Практическая работа №12 "Вычисление простейших определённых интегралов"

Цель работы: закрепление практических навыков вычисления определённых интегралов.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Определенный интеграл, его свойства и вычисление

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$= F(a)-F(b)

(a $и$ b - соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, они пишутся и читаются снизу вверх, а в формулу подставляются сверху вниз!)

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.

$\int_2^3 3x^2\,dx = x^3|_2^3$=$3^3-2^3$=27-8=19.

Вычисления определённого интеграла методом введения новой переменной.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t(a)}^{t(b)} u(t)\,dt$$

Пример 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=t'dx=\cos' x\,dx=-\sin x\,dx \\ t_{верхнее}=\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ t_{нижнее}=\cos 0=1 \end{matrix} \right| = -\int_1^0 t^3\,dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^0 = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Пример 3.

$$\int_0^1 \frac{3x dx}{4-x^2} = \left\| \begin{matrix} t=4-x^2 \\ dt=(4-x^2)'dx=-2x\,dx \\ t_{верхнее} = 4-1=3 \\ t_{нижнее} = 4-0=4 \end{matrix} \right| = -\frac{3}{2}\int_4^3 \frac{dt}{t} = -\frac{3}{2}\ln t\Big|_4^3 = -\frac{3}{2}(\ln 3 - \ln 4) = -\frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}$$

Вычисление определенного интеграла по частям:

Используем формулу:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u=(x-1) & du=u'\,dx=(x-1)'\,dx=dx \\ dv=\cos x\,dx; & v=\int dv=\int \cos x\,dx=\sin x \end{matrix} \right| = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\frac{\pi}{2} - (0-1)\sin 0) +$$

$$\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 2;$$

Пример 5.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} u=6x; & du=u'\,dx=6x'\,dx=6dx \\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}; & v=\int dv=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right| = -6x\operatorname{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx = -$$

$$6\cdot\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} - 6\cdot\frac{\pi}{6}ctg\frac{\pi}{6} + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{3} + \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \pi\sqrt{3} + \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \pi\sqrt{3} + 0 + \ln 2 =$$

$$\pi\sqrt{3} + \ln 2$$

2.Выполнить самостоятельно:

Вычислить определенный интеграл.

Вариант 1	Вариант 2

1. $\int_{-1}^{2}(3x^2+4x-1)\,dx$ 2 $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{2+x^3}$ 3$\int_1^2 \frac{2^x dx}{1-2^x}$ 4$\int_{-1}^{0}(2x+3)e^{-x}\,dx$	1. $\int_{-1}^{2}(3x^2+4x-1)\,dx$ 2$\int_1^2 \frac{2^x dx}{1+4^x}$ 3$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1-4x^3}dx$ 4$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x\,dx$

3.Вывод.

Практическая работа №13 "Решение прикладных задач с помощью определённого интеграла"

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач с помощью определённого интеграла.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Задача о вычислении пути

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2 получаем

$$\int ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью υ(e) за отрезок времени [t_1, t_2]выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (1)$$

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t+3t^2$(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 =150(м).$$

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью v =($6t^2+2t$) м/с, второе – со скоростью v^2=(4t+5) м/с. На каком расстояния друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1=\int_0^5 (6t^2+2t)dt = (2t^2+t^3)\Big|_0^5 =275(м)$$

$$S_2=\int_0^5 (4t+5)dt = (2t^2+5t)\Big|_0^5 =75(м)$$

Таким образом, $S=S_1-S_2$= 275-75=200 (м).

2. Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s, то как известно из курса физики, работа A этой F вычисляется по формуле:

A= F*s

Работу переменной силы f(x) при перемещении по оси Ox материальной точки от x=a до x=b, находим по формуле (3):

$A=\int_a^b f(x)dx$ (2)

Решении задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональная этому растяжению или сжатию, т.е. F=kx, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

Пример 1. Сила упругости F пружины, растянутой на 1^1 = 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 1_2 =0,1 м?

Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: 3=k*0.05, т.е. k=60, следовательно, сила упругости выражается соотношением F=60x. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что a=0; b=0,1:

$A=\int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1}$ =0,3Дж

3. Задача о силе давления жидкости

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле P=gphS, (4)

Где g – ускорение свободного падения в м/с^2;

p– плотность жидкости в кг/м^3;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м^2.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями x = a, x = b, y1 = *f*1(x) и y2=*f*2(x).

Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонт альных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY).

На глубине x выделим одну из них и обозначим через f(x) ее длину, а через Δx ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь $S = f(x) \cdot \Delta x$.

$P = g\rho f(x) \cdot \Delta x \cdot x$

Найдем дифференциал dp этой функции.

$dp = g\rho f(x) \cdot xdx$

Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от x = a до x = b, получим

$$P=g\int_a^b pxf(x)dx \qquad (3)$$

Пример

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м x 0,7 м.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Оу и Ох соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)=0{,}7x,\ x\in[0;0{,}4]$. Так как пределы интегрирования a=0 и b=0,4, то получим:

$$P=g\int_0^{0,4} 1000*0{,}7*xdx = 700\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,4} =56g \approx 549\text{Н}$$

2. Выполнить самостоятельно:

Вариант 1.

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = -5$. Сделать чертёж.

2.Скорость движения точки $v = 18t - 3t^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

3.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20 Н растягивает её на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?

Вариант 2.

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$ и $y = 0$. Сделать чертёж.

2.Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = 29{,}4 - 9{,}8t$ м/с. Найдите наибольшую высоту подъёма тела.

3.При сжатии пружины на 0,05 м совершается работа 30 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м?

3.Вывод.

Практическая работа №14 "Исследование функций двух переменных"

Цель работы: закрепление практических навыков исследования функций двух переменных.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Определение функции двух переменных

Если каждой паре (x;y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D.

Обозначается: z=f(x;y) или z=z(x;y).

Например, S=ab, S=S(a;b)- функции двух переменных; V=abc, V=V(a,b.c) – функция трех переменных;

Способы задания функций нескольких переменных

Чтобы задать функцию двух (трех) переменных, нужно указать способ, с помощью которого для каждой пары (тройки) значений аргументов можно найти соответствующее значение функции. Наиболее часто функция задается аналитически - это явное задание функции или неявное задание

Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных z = f(x, y) определена в некоторой окрестности точки M(x, y) евклидова пространства E2. Частная производная функции z = f(x, y) по аргументу x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции f(x, y) по переменной y в точке M, обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется дифференцируемой.

Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

Пример: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функция двух переменных.

Иногда используют запись $f(x;y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Также встречаются задания, где вместо буквы z используется буква u.

Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Сначала найдем частные производные первого порядка. Их две.

Обозначения:

z'_x или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – частная производная по «икс»

z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частная производная по «игрек»

Начнем с z'_x. **Когда мы находим частную производную по «икс», то переменная y считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$
$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

Комментарии к выполненным действиям:

(1) Первое, что мы делаем при нахождении частной производной – заключаем **всю** функцию в скобки под штрих **с подстрочным индексом**.

(2) Используем правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого примера, как этот, оба правила вполне можно применить на одном шаге. Обратите внимание на первое слагаемое: так как y **считается константой, а любую константу можно вынести за знак производной**, то y^3 мы выносим за скобки. То есть в данной ситуации y^3 ничем не лучше обычного числа. Теперь посмотрим на третье слагаемое $5y$: здесь, наоборот, выносить нечего. Так как y константа, то $5y$ – тоже константа, и в этом смысле она ничем не лучше последнего слагаемого – «семерки».

(3) Используем табличные производные $(C)' = 0$ и $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(4) Теперь z'_y. **Когда мы находим частную производную по «игрек», то переменная x считается константой (постоянным числом)**.

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Используем те же правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В первом слагаемом выносим константу x^2 за знак производной, во втором слагаемом ничего вынести нельзя поскольку $3x^4$ – уже константа.

(2) Используем таблицу производным элементарных функций. **Мысленно поменяем в таблице все «иксы» на «игреки».** В частности, используемые нами формулы выглядят так: $(C)' = 0$ и $(y^n)' = ny^{n-1}$.

Итак, частные производные первого порядка найдены

Подведем итог, чем же отличается нахождение частных производных от нахождения «обычных» производных функции одной переменной:

1) Когда мы находим частную производную z'_x, переменная y считается константой.

2) Когда мы находим частную производную z'_y, переменная x считается константой.

3) Правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной (x, y либо какой-нибудь другой), по которой ведется дифференцирование.

Шаг второй. Находим частные производные второго порядка. Их четыре.

Обозначения:

z''_{xx} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

В понятии второй производной нет ничего сложного. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Частные производные первого порядка:
$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$

$z'_y = 6x^2y^2 + 5$

Сначала найдем смешанные производные:
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Как видите, всё просто: берем частную производную z'_x и дифференцируем ее еще раз, но в данном случае – уже по «игрек».

Аналогично:

$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$

В практических примерах можно ориентироваться на следующее равенство:
$z''_{xy} = z''_{yx}$

Таким образом, через смешанные производные второго порядка очень удобно проверить, а правильно ли мы нашли частные производные первого порядка.

Находим вторую производную по «икс». Никаких изобретений, берем $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ и дифференцируем её по «икс» еще раз:
$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4xy^3 + 12x^3)'_x = 4y^3(x)'_x + 12(x^3)'_x = 4y^3 \cdot 1 + 12 \cdot 3x^2 = 4y^3 + 36x^2$

Аналогично:

$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6x^2y^2 + 5)'_y = 6x^2(y^2)'_y + (5)'_y = 6x^2 \cdot 2y + 0 = 12x^2y$

Следует отметить, что при нахождении z''_{xx}, z''_{yy} нужно проявить повышенное внимание, так как никаких чудесных равенств для их проверки не существует.

Примеры нахождения частных производных первого порядка.

Пример 1. $z = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Решение. Дифференцируем функцию z = f(x, y) сначала по x, полагая y фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли x и y. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

Пример 2. $z = \operatorname{arctg} xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + (xy)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1 + (xy)^2}$.

Пример 3. $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z)$.

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - 2y + z}, \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2 - 2y + z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2 e^{yz} + \frac{1}{x^2 - 2y + z}.$$

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум

Функция *z* = *f(x,y)* имеет **максимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всех точек (x;y), достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё. Функция *z* = *f(x,y)* имеет **минимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) < f(x;y)$ для всех точек (x;y), достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё. Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Исследование функции двух переменных на экстремум проводят по следующей схеме.

1. Находят частные производные *dz/dx* и *dz/dy*.
2. Решают систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

и таким образом находят критические точки функции.

3. Находят частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

4. Вычисляют значения этих частных производных второго порядка в каждой из найденных в п.2 критических точках $M(x_0;y_0)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M$$

5. Делают вывод о наличии экстремумов:

а) если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке *M* имеется максимум;
б) если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке *M* имеется минимум;
в) если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет;
г) если $AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым;

Примеры исследования функций двух переменных на экстремум.

Пример №1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение.

1) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12y,$$

2) тогда система для отыскания стационарных точек имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, получим четыре стационарные точки: $P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$, $P_4(-2,-1)$. Найдем производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = B, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = C$$

и составим дискриминант $\Delta AB\text{-}C^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки $P_1(1,2)$ Δ=36-144<0, в $P_1(1,2)$ экстремума нет.

2) Для точки $P_2(-1,-2)$, Δ =144 – 36 >0, A>0, в $P_2(2,1)$функция имеет минимум, z_{min} = -28

3) Для точки $P_3(-1,-2)$, Δ = 36-144 <0, в $P_3(-1,-2)$ экстремума нет.

4) Для точки $P_4(-2,-1)$, Δ=144 – 36 >0, A<0 в $P_4(-2,-1)$ функция имеет максимум z_{max}=28

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

Решение.

Найдем критические точки локального экстремума внутри указанной области и значения данной функции z = f(x,y) в этих точках. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2$, то система для отыскания критических точек имеет вид

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Точка $P_0(1;1)$ находится внутри области, причем $z(P_0) = -4$. Исследуем функцию z на границе области. На отрезке *OA* имеем : y=0, z = f(x;0) или $g_1(x)=x^2 - 6x$, где $x \in [0;3]$; $g'_1=2x-6$; $g'_1(3)=0$; $g_1(3)=f(3;0)=-9$. На отрезке *OB* имеем: x=0. z=f(0;y) или $z=g_2(y)=-y^2-2y$, где $y \in [0;2]$; $g'_2(y) = -2y-2$; $g'_2(-1)=0$, $-1 \notin [0;2]$. На отрезке АВ имеем $y = 2 - \frac{2}{3}x$, $z = f\left(x; 2-\frac{2}{3}x\right)$ или

$$z = g_3(x) = -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8,$$ где $x \in [0;3]$; $g'_3(x) = -\frac{38}{9}x + 6$;

$$g'_3\left(\frac{27}{19}\right) = 0,$$

$$g_3\left(\frac{27}{19}\right) = f\left(\frac{27}{19}; \frac{20}{19}\right) = -\frac{71}{19}.$$

Найдем значения функции z в точках *O*, *A* и *B*. z(0) = f(0,0) = 0; z(A) = f(3;0) = -9, z(B) = f(0;2) = -8.

Сравнивая значения $f(0;0)$, $f(0;2)$, $f(3;0)$, $f\left(\frac{27}{19};\frac{20}{19}\right)$, $f(1;1)$, приходим к выводу:

наибольшее значение $z_{max}=0$ в т. O(0,0);
наименьшее значение $z_{min}=-9$ в т. A(3,0).

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 2
1.Найти частные производные первого порядка функции:	
$z = x^3 + 3x^2y - y^3$	$z = x^2 + xy + y^2$
2Исследовать на экстремум функцию:	
1)$z = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 16y - 7$	1)$z = -2x^2 - y^2 + 3xy - 2x + 7y + 6$
2)$z = -5x^2 - 3y^2 + 2xy - 18x - 10y + 4$	2)$z = 5 - 7x^2 - 5y^2 + 2xy - 34x + 34y$

3.Сделать вывод.

Практическая работа №15 "Решение дифференциальных уравнений первого порядка"

Цель работы: закрепление практических навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Дифференциальное уравнение – равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения:

$F(x,y,y',y''\ldots)=0$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' - её производная первого порядка и т.д.

Решение дифференциального уравнения – функция, подстановка которой в это уравнение обращает его тождество.

Общее решение – решение дифференциального уравнения, содержащее столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение – это решение, получающееся из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных С

Для нахождения частных решений задают начальные условия.

Порядок дифференциального уравнения – наивысший порядок производных или дифференциалов, входящих в это уравнение.

Интегральная кривая - график $y=F(x)$, построенный на плоскости xOy,являющийся решением дифференциального уравнения.

Общему решению $y=F(x,C)$ соответствует семейство интегральных кривых, зависящих от постоянной C.

Теорема Коши: Если функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную то решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ при начальном условии $f(x_0)=y_0$ существует и единственно т.е. через точку (x_0,y_0) проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.

1.1. Виды дифференциальных уравнений

Виды дифференциальных уравнений:

- Обыкновенные дифференциальные уравнения - уравнения, в которых одна независимая переменная

- Дифференциальные уравнения в частных производных - уравнения, в которых независимых переменных две и более

Виды дифференциальных уравнений представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка		
Название	Вид	Способ решения
С разделяющимися переменными	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной. Т.е. $f(x)g(y)dx+\varphi(x)q(y)dy=0$ или $y'=f(x)g(y)$	**1.**разделить переменные $\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=-\frac{q(y)}{g(y)}dy$ **2**.проинтегрировать $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=\int-\frac{q(y)}{g(y)}=dy$ **3**.привести к стандартному виду $y=\varphi(x)+c$ – общее решение
Однородные	$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одного измерения или $y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ (если в функции заменить $x=tx$, $y=ty$ и преобразовать вернемся к исходному уравнению)	**1.** замена $y=tx$, *тогда* $y'=t'x+x't$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}x+\frac{dx}{dx}t$ $dy=tdx+xdt$ **2**. привести к уравнению с разделяющимися переменными и решить (см. выше). **3**. вернуться к замене, подставить $t=\frac{y}{x}$ **4.** привести к стандартному виду $y=\varphi(x)+c$

Линейные	$y'+P(x)y=Q(x)$ (y' и y' входят в первых степенях не перемножаясь между собой) а) линейное однородное $y'+P(x)y=0$ б) линейное неоднородное $y'+P(x)y=Q(x)$ в) уравнение Бернулли $y'+P(x)y=Q(x)y''$	**1.** замена $y=uv$,тогда $y'=u'v+v'u$ **2.** $u'v+v'u+ P(x) uv= Q(x)$ $v(u'+P(x)u)+v'u= Q(x)$ (*) **3.** в уравнении (*) приравнять скобку к нулю $u'+P(x)u=0$ – с разделенными переменными найти u $u=P(x)$ **4**. значение u подставить в уравнение (*) $v'P(x)=Q(x)$ - с разделенными переменными найти v $v=F(x)+c$ **5**. вернуться к замене $y=P(x)(F(x)+c)$ – общее решение

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем обозначение $y' = \frac{dy}{dx}$. Итак: $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

На втором шаге смотрим, нельзя ли разделить переменные? Это значит, что **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правую часть** перенести все **«иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» действий: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители и активные участники действий. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные: $\ln|y| = \ln|x| + C$

Как мы помним, к любой **первообразной** приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз *(т.к. константа + константа всё равно равна другой константе)*. В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Ответ в такой форме вполне приемлем, но нет ли варианта получше? Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) тоже целесообразно записать под логарифмом*.

То есть, **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем **<u>свойство логарифмов</u>** $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае: $\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и **<u>модули</u>** можно с чистой совестью убрать: $y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и дифференцируем его:

$y' = (Cx)' = C$

После чего подставляем $y = Cx$ и производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$x \cdot C = Cx$

$Cx = Cx$ – получено верное равенство, значит, общее решение $y = Cx$ удовлетворяет уравнению $xy' = y$, что и требовалось проверить.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения. Ясно, что любая из функций $y = x$, $y = -3x$, $y = \frac{x}{5}$ и т.д. удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y$.

Иногда общее решение называют *семейством функций*. В данном примере общее решение $y = Cx$, где $C = const$ – это семейство линейных функций, а точнее, семейство прямых пропорциональностей.

После обстоятельного разжевывания первого примера уместно ответить на несколько наивных вопросов о дифференциальных уравнениях:

1) *В этом примере нам удалось разделить переменные. Всегда ли это можно сделать?* Нет, не всегда. И даже чаще переменные разделить нельзя. Например, в **однородных уравнениях первого порядка**, необходимо сначала провести замену. В других типах уравнений, например, **в линейном неоднородном уравнении первого порядка**, нужно использовать различные приёмы и методы для нахождения общего решения. **Уравнения с разделяющимися переменными**, которые мы рассматриваем в первом примере – простейший тип дифференциальных уравнений.

2) *Всегда ли можно проинтегрировать дифференциальное уравнение?* Нет, не всегда. Очень легко придумать «навороченное» уравнение, которое не проинтегрировать, кроме того, существуют неберущиеся интегралы. Но подобные ДУ можно решить приближенно с помощью специальных методов.

3) *В данном примере мы получили решение в виде общего интеграла* $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$. *Всегда ли можно из общего интеграла найти общее решение, то есть, выразить «игрек» в явном виде?* Нет не всегда. Например: $y + \ln|y| = \arcsin x + xy^2 + C$. Ну и как тут выразить «игрек»?! В таких случаях ответ следует записать в виде общего интеграла. Кроме того, иногда общее решение найти можно, но оно записывается настолько громоздко и коряво, что уж лучше оставить ответ в виде общего интеграла

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде: $\frac{dy}{dx} = -2y$

Очевидно, что переменные можно разделить: $\frac{dy}{y} = -2dx$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константа с надстрочной звездочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$$y = e^{-2x+C^*}$$

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$$y = Ce^{-2x}$$

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений.

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2\cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1$$

То есть, $C = 2$

Стандартная версия оформления:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя два этапа:

Сначала необходимо проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится: $y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$

$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^{x}$

Решение: Данное уравнение является линейным и имеет простейший вид: $y' - y = q(x)$.

Как решить линейное уравнение?

Существуют два способа решения. Первый способ – это так называемый метод вариации произвольной постоянной, но мы им не воспользуемся. Второй способ связан с заменой переменной и подстановкой, иногда его называют *методом Бернулли*. В данном примере будет рассматриваться метод подстановки, он алгоритмически прост и понятен, и решение уравнения принимает чёткий трафаретный характер.

Сделаем замену:

$y = uv$, где u и v – некоторые, **пока ещё неизвестные** функции, зависящие от «икс».

Коль скоро проводится замена $y=uv$, то нужно выяснить, чему равна производная. По правилу дифференцирования произведения: $y'=u'v+uv'$

Подставляем $y=uv$ и $y'=u'v+uv'$ в наше уравнение $y'-y=e^x$: $u'v+uv'-uv=e^x$

В чём состоит задача? Необходимо найти неизвестные функции «y» и «v», которые зависят от «икс». И как раз этому будут посвящены все последующие действия.

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

$$u'v+\boxed{uv'-uv}=e^x$$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае: $u'v+u(v'-v)=e^x$

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v'-v=0$.

Если $v'-v=0$, тогда из нашего уравнения $u'v+u(v'-v)=e^x$ получаем: $u'v+u\cdot 0=e^x$ или просто $u'v=e^x$.

Уравнения записываем в систему: $\begin{cases} v'-v=0 \\ u'v=e^x \end{cases}$.

Именно в таком порядке.

Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию** v**.** Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными.

$$v'-v=0$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x$$

$$v=e^x$$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы не приписываем.

Далее **подставляем найденную функцию** $v = e^x$ **во второе уравнение системы** $u'v = e^x$:

$u' \cdot e^x = e^x$

Из второго уравнения находим функцию u.

$u' = 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$u = \int dx = x + C$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Обе функции найдены:

$v = e^x$

$u = x + C$

Записываем общее решение:

$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

В ответе можно раскрыть скобки, это дело вкуса:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = const$

Проверка :

Берём полученный ответ $y = Ce^x + xe^x$ и находим производную:

$y' = (Ce^x + xe^x)' = C(e^x)' + (x)'e^x + x(e^x)' = Ce^x + e^x + xe^x$

Подставим $y = Ce^x + xe^x$ и $y' = Ce^x + e^x + xe^x$ в исходное уравнение $y' - y = e^x$:

$Ce^x + e^x + xe^x - (Ce^x + xe^x) = e^x$

$Ce^x + e^x + xe^x - Ce^x - xe^x = e^x$

$e^x = e^x$

Получено верное равенство, таким образом, общее решение найдено правильно.

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение: Данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения. Проведем замену: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ и подставим $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$

После подстановки проведем вынесение множителя за скобки.

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$$

Составляем систему. Для этого приравниванием к нулю то, что находится в скобках: $v' + 2xv = 0$, автоматически получая и второе уравнение системы: $u'v + u \cdot 0 = xe^{-x^2}$

$u'v = xe^{-x^2}$

В результате:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = xe^{-x^2} \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ – найденную функцию v подставим во второе уравнение системы $u'v = xe^{-x^2}$:

$u' \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2}$

Теперь находим функцию u. Уравнение опять получилось простенькое:

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$u = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Обе функции найдены:

$$v = e^{-x^2}$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Таким образом:

Общее решение: $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$

Ответ: общее решение: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$, где $C = const$

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.	
$(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$	$x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$
2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.	
$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; $y(4) = 0$	$(1 + y)dx = (1 - x)dy$; $y(3) = -2$
3. Найти решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.	
$\frac{dy}{dx} + xy = x$	$\frac{dy}{dx} - 4xy = -4x^3$
4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения.	
$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$, если $y(1) = 3$	$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^2$, если $y(1) = 1$

3.Вывод.

Практическая работа №16 "Решение дифференциальных уравнений второго порядка"

Цель работы: закрепление практических навыков решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

В дифференциальное уравнение второго порядка **обязательно** входит вторая производная y'' и **не входят** производные более высоких порядков: $F(x, y, y', y'') = 0$

В теории и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид: $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

<u>**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами**</u> имеет вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.		
Допускающие понижения порядка	*y''=f(x)*	Решаются двойным интегрированием $y' = \int y''\,dx = \int f(x)dx = F(x) + c$ $y = \int y'\,dx = \int (F(x) + c)dx = F(x) + cx + c_1$
Линейные однородные второго порядка с постоянными коэффициентами	*y''+py+qy=0* где *p, q* – заданные числа Всякое Л.О.У. второго порядка имеет систему	**1.**Составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ **2**.в зависимости от вида корней, фундаментальная система решений имеет вид:

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">двух линейно независимых <u>частных решений</u>.
$\begin{cases} y = y_1(x) \\ y = y_2(x) \end{cases}$
которая называется фундаментальной системой решений.

<u>Общее решение</u> есть линейная комбинация частных решений его фундаментальной системы $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$</td><td>корни характеристического уравнения</td><td>фундаментальная система частных решений</td><td>общее решение</td></tr>
<tr><td>действительные
Различные
$k_1 \neq k_2 \varepsilon R$</td><td>$y_1 = e^{k, x}$
$y_2 = e^{k_2 x}$</td><td>$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$</td></tr>
<tr><td>Действительные
Равные
$k_1 = k_2 = k \varepsilon R$</td><td>$y = e^{kx}$
$y = x e^{kx}$</td><td>$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
или
$y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$</td></tr>
<tr><td>Комплексные (мнимые)
$k_1 = \beta i$
$k_2 = -\beta i$</td><td>$y_1 = \cos\beta$
$y_2 = \sin\beta$</td><td>$y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$</td></tr>
<tr><td>Комплексные
$k_1 = \alpha + \beta i$
$k_2 = \alpha - \beta i$</td><td>$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$
$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$</td><td>$y = e^{2\alpha}(c_1\cos\beta + c_2\sin\beta x)$</td></tr>
</table>

<u>Пример 1</u>

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня .
Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Общее решение линейного **неоднородного** уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида $y'' + py' + qy = f(x)$, записывается в виде $y = y_0 + \tilde{y}$, где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Укажем способ, позволяющий найти частное решение неоднородного уравнения по виду правой части. Заметим, что это возможно лишь в случаях, когда правая часть уравнения является функцией определенного вида.

1. Пусть $f(x) = ae^{mx}$, где a - некоторое число, не равное нулю. Тогда

$а)$ если, $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, то частное решение уравнения ищут в виде Ae^{mx}, где A - неизвестное число, которое находят, подставляя $\tilde{y} = Ae^{mx}$ в неоднородное уравнение;

$б)$ если $k_1 = m$, а $k_2 \neq m$, то в этом случае частное решение ищут в виде $\tilde{y} = xAe^{mx}$;

$в)$ наконец, если и $k_1 = m$ и $k_2 = m$, т.е. $k_1 = k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2Ae^{mx}$.

2. Если $f(x) = P_n(x)e^{mx}$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ – многочлен степени $n(n = 1,2,3,\ldots, n)$, то

$а)$ при $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$ решение ищут, просто «передразнивая» правую часть, т.е. $\tilde{y}$, как и правая часть, должна представлять собой произведение многочлена той же степени, что и в правой части уравнения, но с неопределенными коэффициентами, и e^{mx},т.е. $\tilde{y} = Q_n(x)e^{mx}$. В частности, если $f(x) = (ax+b)e^{mx}$, то $\tilde{y} = (Ax+B)e^{mx}$;

$б)$ при $k_1 = m$, $k_2 \neq m$ частное решение $\tilde{y}$ ищут в виде $\tilde{y} = xQ_n(x)e^{mx}$;

$в)$ при $k_1 = k_2 = m$ находим $\tilde{y}$ по формуле $\tilde{y} = x^2Q_n(x)e^{mx}$.

2. Пусть теперь $f(x) = P_n(x)$, т.е. в правой части уравнения находится многочлен некоторой степени или некоторое число (если степень многочлена нулевая). Тогда мы можем воспользоваться формулами, рассмотренными выше, полагая в них $m = 0$. (Действительно $P_n(x) = P_n(x)e^{0x}$ и, очевидно, $m = 0$).

Таким образом, имеем:

$а)$ если $k_1 \neq m$, $k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = Q_n(x)$;

$б)$ если $k_1 = m$, $k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = xQ_n(x)$;

$в)$ если $k_1 = k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2Q_n(x)$.

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y'' - 4y = 8x^3$

Решение:

1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. $y'' - 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^3$

И вопрос, который вызывает затруднения чаще всего: **В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?**

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x) = 8x^3$. Тут у нас многочлен третьей степени. По идее, частное решение тоже следует искать в виде многочлена третьей степени: $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где A, B, C, D – *пока ещё* неизвестные коэффициенты (числа).

После предварительного анализа смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$, найденные на предыдущем этапе: это различные действительные корни, отличные от нуля.

Используем **метод неопределенных коэффициентов**.

Найдём первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$
$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:
$y'' - 4y \overset{(1)}{=} 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \overset{(2)}{=}$
$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D \overset{(3)}{=} 8x^3$

(1) Выполняем подстановку $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и $\tilde{y}'' = 6Ax + 2B$.
(2) Раскрываем скобки.
(3) После максимальных упрощений ставим знак равенства и приписываем нашу правую часть $8x^3$.

Далее работаем с последним равенством – необходимо **приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных**

уравнений. В картинках процесс выглядит так:
$$\boxed{6A}x+2B\boxed{-4A}x^3-4Bx^2\boxed{-4C}x-4D=\boxed{8}x^3+0\cdot x^2+\boxed{0}\cdot x+0$$

$$\begin{cases}-4A=8\\-4B=0\\6A-4C=0\\2B-4D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=0\\C=-3\\D=0\end{cases}$$

Чтобы было еще проще, новичкам рекомендую предварительно сгруппировать подобные слагаемые: $6Ax+2B-4Ax^3-4Bx^2-4Cx-4D=-4Ax^3-4Bx^2+(6A-4C)x+(2B-4D)=8x^3$, и только потом составлять систему.

В данном случае система получилась очень простой, и многие из читателей справятся с ней даже устно.

Подставляем найденные значения A,B,C,D в наш исходный подбор частного решения $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$:

$$\tilde{y}=-2x^3+0\cdot x^2-3x+0=-2x^3-3x$$

Таким образом, подобранное частное решение неоднородного уравнения: $\tilde{y}=-2x^3-3x$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения: $y=Y+\tilde{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-2x^3-3x,\ где\ \ C_1,C_2-const$

Ответ: общее решение: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-2x^3-3x,\ где\ \ C_1,C_2-const$

<u>Пример 3</u>

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения.

$$y''-7y'+12y=3e^{4x}$$

Решение:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения: $y''-7y'+12y=0$

Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2-7\lambda+12=0$

$$D=49-48=1;\sqrt{D}=1$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{7\pm1}{2}$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ – получены различные действительные корни, среди которых нет нуля, поэтому общее решение: $Y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x},\ где\ C_1, C_2 - const$.

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?

Сначала смотрим на правую часть и выдвигаем первую гипотезу: раз в правой части находится экспонента, умноженная на константу $f(x) = 3e^{4x}$, то частное решение, по идее, нужно искать в виде $\tilde{y} = Ae^{4x}$

Далее смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, найденные в предыдущем пункте. Это два действительных корня, среди которых нет нуля. То есть, частное решение дифференциального уравнения следует искать в виде: $\tilde{y} = x \cdot Ae^{4x} = Axe^{4x}$, где A – *пока еще* неизвестный коэффициент, который предстоит найти.

Используем правило дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$. Найдем первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = (Axe^{4x})' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} = (4Ax + A)e^{4x}$

$\tilde{y}'' = ((4Ax + A)e^{4x})' = 4Ae^{4x} + 4(4Ax + A)e^{4x} = (16Ax + 8A)e^{4x}$

Подставим $\tilde{y} = Axe^{4x}$, $\tilde{y}' = (4Ax + A)e^{4x}$ и $\tilde{y}'' = (16Ax + 8A)e^{4x}$ в левую часть неоднородного уравнения:

$$y'' - 7y' + 12y = (16Ax + 8A)e^{4x} - 7(4Ax + A)e^{4x} + 12Axe^{4x} =$$
$$= (16Ax + 8A - 28Ax - 7A + 12Ax)e^{4x} = Ae^{4x} = 3e^{4x}$$

Что сделано? Подстановка, упрощение, сокращение, и в конце – приравнивание к исходной правой части $3e^{4x}$.

Из последнего равенства $Ae^{4x} = 3e^{4x}$ автоматически получаем $A = 3$. Найденное значение $A = 3$ подставляем в наш исходный подбор $\tilde{y} = Axe^{4x}$.

Таким образом, частное решение: $\tilde{y} = 3xe^{4x}$

3) Составляем общее решение неоднородного уравнения: $y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 4

Найти частное решение неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям.
$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце добавляется дополнительный пункт.

Решение:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения: $y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$ – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$. Смотрим на правую часть неоднородного уравнения $f(x) = e^{3x}$, и сразу появляется первая версия подбора: $\tilde{y} = Ae^{3x}$.

Далее смотрим на корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 3$ – действительные кратные корни. Частное решение следует искать в виде: $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$

Ищем неизвестный коэффициент A.

Найдем первую и вторую производную:
$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$

$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения и максимально упростим выражение:

$$y'' - 6y' + 9y = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$$
$$= (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2) \cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

В самом конце после упрощений приписываем исходную правую часть e^{3x}.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Таким образом: $\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения: $y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2 - const$

4) Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Сначала берём найденное общее решение $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$ и применяем к нему первое начальное условие $y(0) = 0$:

$$y(0) = C_1e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot e^{3\cdot 0} = C_1e^0 + 0 + 0 = C_1$$

Согласно начальному условию: $y(0) = C_1 = 0$ – получаем первое уравнение.

Далее находим производную от общего решения: $y' = \left(C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}\right)' = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + 3C_2xe^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{2}x^2e^{3x}$ и применяем к найденной производной второе начальное уравнение $y'(0) = 1$:

$$y'(0) = 3C_1e^0 + C_2e^0 + 0 + 0 + 0 = 3C_1 + C_2$$

Согласно второму начальному условию: $y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1$ – получаем второе уравнение.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 1$$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$, в общее решение $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

Ответ: частное решение: $y = xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

Пример 5

Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin\ 2x$

Решение:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения: $y'' - 2y' + 5y = 0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение: $Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2) Частное решение неоднородного уравнения ищем в «обычном» виде: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$

Выясним, чему равны коэффициенты A, B.

Найдем производные:

$\tilde{y}' = (A\cos 2x + B\sin 2x)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$\tilde{y}'' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:

$$y'' - 2y' + 5y = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x =$$
$$= (A - 4B)\cos 2x + (4A + B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x$$

(После подстановки и максимальных упрощений приписываем правую часть: $f(x) = 21\cos 2x - \sin 2x$)

Из последнего равенства $(A - 4B)\cos 2x + (4A + B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x$ составим и решим систему:

$$\begin{cases} A - 4B = 21 \\ 4A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A - 16B = 84 \\ 4A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow 17B = -85 \Rightarrow B = -5; A = 1$$

Таким образом, подобранное частное решение: $\tilde{y} = \cos 2x - 5\sin 2x$.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения: $y = Y + \tilde{y} = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x, \ где \ C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x, \ где \ C_1, C_2 - const$

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 2
Найти общее решение дифференциальных уравнений	
1)$y'' + y' = x^2 + 4$	1)$y'' - 2y' = 2x + 1$
2)$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$	2)$y'' - y' - 6y = e^{3x}$
3)$y'' - 8y' + 15y = 3\sin 5x$	3)$y'' - 5y' - 24y = \cos 3x$
Найти частное решение дифференциального уравнения	
$y'' + 2y' = 3x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$	$y'' + 7y' = 2x^2 + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

3.Вывод.

Практическая работа №17 "Определение сходимости числовых рядов"

Цель работы: закрепление практических навыков определения сходимости числовых рядов.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Выражение

$$\sum_{N=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ... \qquad (1)$$

называется **<u>числовым рядом</u>**, числа $U_1, U_2, ..., U_n, ...$- <u>членами</u> ряда, $U_n = F(n)$ - <u>общим членом</u> ряда.

Сумма n первых членов ряда $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ называется <u>частичной суммой</u> этого ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется **<u>сходящимся</u>**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ Значение S называется <u>суммой ряда</u>.

Если ряд не сходиться, то он называется **<u>расходящимся.</u>**

Часто интерес представляет не сама сумма того или иного ряда, а лишь факт сходимости или расходимости этого ряда. Установление того факта нередко основывается на сравнении исследуемых рядов с рядами, о сходимости или расходимости которых заранее известно.

В качестве рядов сравнения часто выбирают:

а) бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (|q| < 1)$, которая сходится и имеет сумму $S = \frac{a}{1-q}$;

б) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$, являющийся расходящимся;

в) обобщенно-гармоничный ряд

$$\begin{cases} \text{при } p>1 & \text{- сходится} \\ \text{при } p\le 1 & \text{- расходится} \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$$

Основные свойства рядов

Пусть дан ряд (1). Ряд

$$U_{n+1}+U_{n+2}+U_{n+3}+\ldots \qquad (2)$$

называется <u>остатком ряда</u> (1).

- Если сходится ряд (1), то сходится и n-й остаток этого ряда (2) и наоборот.

- Если сходится ряд (1), то сходится и ряд

$aU_1+aU_2+\ldots+aU_n+\ldots,$

причем сумма последнего ряда равна aS.

- Если сходятся ряды

$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots, \qquad V_1+V_2+\ldots+V_n+\ldots,$

имеющие соответственно суммы S и t, то сходится и ряд

$(U_1+V_1)+(U_2+V_2)+\ldots+(U_n+V_n)+\ldots,$

причем сумма последнего ряда равна S + t.

Признаки сходимости рядов

<u>Необходимый признак сходимости ряда.</u>

Если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}U_n=0. \qquad (3)$$

Этот признак сходимости является **необходимым**, но не достаточным.

Так, для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, но тем не менее ряд расходиться.

Достаточный признак расходимости.

Если для ряда (1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится.

✓ **Ряды с положительными членами**

✧ Признак сравнения рядов (первый признак сравнения).

Пусть даны два ряда

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots,$

и

$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots,$

причем $U_n \leq V_n \, (n = 1,2,3,\ldots)$.

Тогда:

а) если сходится ряд $V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$, то будет сходиться и ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$;

б) если расходится ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$, то будет расходиться и ряд $V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$.

✧ Признак сравнения в предельной форме (второй признак сравнения).

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

✧ Признак Даламбера.

Если для ряда (1)существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=D$$

(4)

то при D>1 ряд расходится, при D<1 ряд сходится, при D=1 вопрос остается нерешенным.

✧ Признак Коши.

Если для ряда (1) существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=C$$

(5)

то при C < 1 ряд сходится, при C > 1 ряд расходится, при C = 1 Вопрос остается нерешенным.

✧ Интегральный признак Коши.

Если F(x) при $x \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n = f(n)$, сходиться или расходится в зависимости от того, сходиться или расходится

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

(6)

В случае сходимости ряда остаток R_n удовлетворяет неравенству: $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x)dx \cdot$

Пример1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

Решение:

Сравним ряд с рядом, у которого $V_n = \dfrac{1}{2^n}$ (т.е. с бесконечно убывающей геометрической прогрессией).Применим первый признак сравнения рядов.

$\dfrac{1}{2^n + 1} < \dfrac{1}{2^n}$ (n = 1, 2, 3,

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходиться, то сходиться и данный ряд.

Пример2 Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \ldots$

Решение:

Сравним ряд с гармоническим рядом, у которого $V_n = \dfrac{1}{n}$.

Применим второй признак сравнения рядов:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

Так как предел конечен и отличен то нуля, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то расходится и данный ряд.

Пример3 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Решение:

Применим признак Даламбера; имеем $U_n = \dfrac{10^n}{n!}$, $U_{n+1} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$D = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n \cdot 10 \cdot n!}{n!(n+1)10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

Так как D<1, то ряд сходиться.

Пример4 Исследовать на сходимость ряд $1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \ldots$

Решение:

Признак Коши для этого ряда дает:

$C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Так как C < 1, ряд сходиться.

✓ **Знакопеременные ряды**

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются действительные числа произвольного знака.

Знакопеременный ряд $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$ сходиться, если сходится ряд

$$\left|U_1^1\right| + \left|U_2^2\right| + \ldots +^n \left|U_n\right| + \ldots$$

(7)

В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется абсолютно-сходящимся.

Операции над абсолютно-сходящимися рядами:

- Если в абсолютно-сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный
ряд так же будет абсолютно сходиться, а сумма его будет равна сумме исходного.

- Абсолютно-сходящиеся ряды можно перемножать.

Пусть даны два абсолютно-сходящихся ряда:

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$

и

$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$

Соответственно с суммами S и t.

Тогда ряд, членами которого являются все произведения любого члена первого ряда на любой член второго ряда, также сходится абсолютно и сумма его равна произведению St.

✓ **Знакочередующиеся ряды**

Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если соседние его члены имеют различные знаки.

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 ... + (-1)^{n-1} U_n + ...,$$

(8)

где $U_n > 0$ (n = 1, 2, 3, …)

✧ Признак сходимости Лейбница

Знакочередующийся ряд (8) сходится, если выполняются следующие два условия:

- абсолютные величины его членов монотонно убывают: $U_1 > U_2 > U_3 > ...$;

- $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 0$.

Для знакочередующегося ряд (8), удовлетворяющего признаку сходимости Лейбница, остаток R_n не превосходит абсолютной величины своего первого члена, т.е. $|R_n| \le |U_{n+1}|$.

Признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующихся рядов с монотонно убывающими членами.

Алгоритм исследования на сходимость знакопеременных рядов

° Исследовать на сходимость ряд, составленный из модулей членов данного ряда, используя
какой-либо признак сравнения.

° Сделать вывод об абсолютной или условной сходимости этого ряда.

° Выяснить, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.
Для этого:

- Проверить, выполняется ли равенство для абсолютных величин членов ряда

- Найти предел общего члена ряда

- Сделать вывод о сходимости данного исходного ряда

<u>Пример5</u> Исследовать на сходимость ряд $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^2}\right)+\ldots$

Решение:

Этот ряд знакочередующийся.

Первое условие Лейбница не выполняется: 1,1 > 1,02 > 1,003 > …

Проверим выполнение второго условия:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)=1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0,$ ряд расходится.

<u>Пример6</u> Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^3+1}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

Решение:

Этот ряд знакочередующийся. Так как

$$\frac{2}{2^2+1}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}};\quad \frac{3}{3^2+1}+\frac{1}{3+\frac{1}{3}};\quad \frac{4}{4^2+1}+\frac{1}{4+\frac{1}{4}};\ \ldots,$$

то

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}\quad \ldots.$$

Первое условие признак Лейбница выполняется.

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0,$

т.е. выполняется и второе условие. Значит, данный ряд сходится

2.Самостоятельное выполнение заданий

Вариант 1	Вариант 1
1.Исследовать сходимость рядов	
$\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\cdots$	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\cdots$
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$
2.Исследовать ряд на сходимость, применяя признаки сравнения	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{4n+1}}$
3.Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^7+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n^2+1)8^n}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n\sqrt{4n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$

3.Вывод.

Практическая работа №18 "Исследование на сходимость степенных рядов"

Цель работы: закрепление практических навыков определения сходимости степенных рядов.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Функциональные ряды

Выражение

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots$$

(1)

называется функциональным рядом относительно переменной x.

Совокупность всех значений переменной x, при которой функции $U_1(x),\ U_2(x),\ldots.U_n(x),$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Если значение $x=x_o$ принадлежит области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, то говорят о сумме этого функционального ряда в точке $x=x_o$: $U_1(x_o)+U_2(x_o)+\ldots+U_n(x_o)+\ldots=S(x_o)$.

Сумма функционального ряда сама является функцией переменной x.

Степенные ряды.

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1\,x+\ldots+a_n\,x^n+\ldots \qquad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$- действительные числа, называется степенным относительно переменной x рядом.

Для любого степенного ряда существует такое неотрицательное число R, что этот ряд сходится абсолютно при $|x|<R$, расходится при $|x|>R$. Поведение ряда при $x=\pm R$ подлежит дальнейшему анализу.

Число R называется <u>радиусом сходимости</u> данного степенного ряда.

Область значений переменной x: -R<x<R – <u>интервалом сходимости.</u>

Если R = 0, то ряд сходится лишь при x = 0, если же R=∞, то ряд сходится при любом действительном x.

Интервал сходимости степного ряда находят, применяя признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда, т.е. находят $D=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$,

по признаку Даламбера ряд сходится, если $D<1$. Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом интервале, содержащемся в его интервале сходимости.

При $|x|<R$ сумма степенного ряда есть непрерывная и сколько угодно раз дифференцируемая функция от x. Степенной ряд можно почленно дифференцировать при $|x|<R$ и интегрировать на любом замкнутом интервале, содержащемся в интервале (-R, R). Получающиеся в результате почленного интегрирования от 0 до x ряды имеют тот же радиус сходимости R.

<u>Пример1</u> Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+...+\frac{1}{n^x}+...$

Решение:

Ряд сходится при x > 1, и расходиться при x ≤ 1. Следовательно, область сходимости этого ряда описывается неравенством x > 1.

<u>Пример2</u> Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+...+\frac{1}{n^2+x^2}+...$

Решение:

Члены функционального ряда $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+...+\frac{1}{n^2+x^2}+...$ при любом x меньше соответствующих членов ряда “обратных квадратов“: $\frac{1}{n^2+2^x}<\frac{1}{n^2}$ $\quad (n=1,2,3,...)$.

Так как последующий ряд сходится, будет сходиться и исходный ряд при любом x; его

областью сходимости является множество всех действительных чисел.

Пример3 Исследовать на сходимость ряд рассмотрим ряд $\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+...+\frac{1}{n+1+\sin x}+...$

Решение:

Поскольку sin x ≤ 1, члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармоничного ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{n+1+\sin x}\geq\frac{1}{n+2} \qquad (n=1,2,3,...).$$

Следовательно, исходный ряд не сходится ни при каком значении x. Область сходимости – Ø.

Пример4 Исследовать на сходимость ряд $5x+\frac{5^2\cdot x^2}{2!}+\frac{5^3+x^3}{3!}+...+\frac{5^n\cdot x^n}{n!}+...$

Решение:

Применим признак Даламбера:

$$U_n=\frac{5^n\cdot x^n}{2!},\quad U_{n+1}=\frac{5^{n+1}+x^{x+1}}{(n+1)!}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\ 5^n\cdot x^n}\right|=5\cdot|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Так как предел < 1 и не зависит от x, то ряд сходится при всех значениях x.

Приме5 Исследовать на сходимость ряд $1!x+2!x^2+3!x^3+...+n!x^n+...$

Решение:

Здесь $D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!\ x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

Стало быть, ряд расходится при всех значениях x, кроме x = 0.

Пример6 Исследовать на сходимость ряд $2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+...$

Решение:

Применим признак Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|(2x)^{n+1}\cdot n/(n+1)\cdot(2x)^n\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2|x|\cdot$$

Ряд сходится, если $2|x|<1$, т.е. если $|x|<\frac{1}{2}$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. При $x=\frac{1}{2}$ получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Применим признак Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$

2) $\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно, ряд сходится.

При x = - $\frac{1}{2}$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots$

Этот ряд расходится, так как членами его являются члены гармонического ряда, умноженные на -1. таким образом, исходный степенной ряд сходится при $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$.

2.Самостоятельное выполнение заданий

Вариант 1	Вариант 2
Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала	
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$	1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+5}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^n}{4^n}$	2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\sqrt{3n+1}}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{8^n\sqrt[5]{n+1}}$	3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{7^n\sqrt[5]{n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^n\sqrt[8]{n+1}}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{5^n\sqrt[8]{n+1}}$

3.Вывод.

Практическая работа №19 "Разложение функций в степенные ряды"

Цель работы: закрепление практических навыков разложения функций в степенные ряды.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

- **Ряды Тейлора и Маклорена**

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по *формуле Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

где R_n − *остаточный член* в форме Лагранжа определяется выражением

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad a<\xi<x.$$

Если приведенное разложение сходится в некотором интервале x, т.е. $\lim_{n\to\infty} R_n=0$,

то оно называется *рядом Тейлора*, представляющим разложение функции $f(x)$ в

Если $a = 0$, то такое разложение называется *рядом Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n.$$

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Пример 1

Найти ряд Маклорена для функции $\cos^2 x$.

Решение.

Воспользуемся тригонометрическим равенством $\cos^2 x =$

Поскольку ряд Маклорена для cos x имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, то можно записать

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Отсюда следует:

$$1 + \cos 2x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Пример 2

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ в точке $x = 1$.

Решение.

Вычислим производные:

$$f'(x) = 6x - 6, \quad f''(x) = 6, \quad f'''(x) = 0.$$

Видно, что $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $n \geq 3$. Для $x = 1$ получаем значения:

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) = 6.$$

Следовательно, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(1)\frac{(x-1)^n}{n!} = 2 + \frac{6(x-1)^2}{2!} = 2 + 3(x-1)^2.$$

Пример 3

Найти разложение в ряд Маклорена функции e^{kx}, k − действительное число.

Решение.

Вычислим производные:

$$f'(x) = \left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}, \quad f''(x) = \left(ke^{kx}\right)' = k^2e^{kx}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}.$$

Тогда в точке $x = 0$ получаем

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = ke^0 = k, \quad f''(0) = k^2e^0 = k^2, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = k^n e^0 = k^n.$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Маклорена выражается формулой

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n x^n}{n!}.$$

Пример 4

Найти разложение в ряд Тейлора кубической функции x^3 в точке $x = 2$.

Решение.

Обозначим $f(x) = x^3$. Тогда

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2, \quad f''(x) = \left(3x^2\right)' = 6x, \quad f'''(x) = (6x)' = 6, \quad f^{IV}(x) = 0,$$

и далее $f^{(n)}(x) = 0$ для всех x

В точке $x = 2$, соответственно, получаем

$$f(2) = 8, \quad f'(2) = 12, \quad f''(2) = 12, \quad f'''(2) = 6.$$

Таким образом, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(2)\frac{(x-2)^n}{n!} = 8 + 12(x-2) + \frac{12(x-2)^2}{2!} + \frac{6(x-2)^3}{3!} = 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-$$

Пример 5

Найти разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^{\mu}$.

Решение.

Пусть $f(x) = (1+x)^{\mu}$, где μ − действительное число, и $x \neq -1$. Производные будут равны

$$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1},$$

$$f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},$$

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}.$$

При $x = 0$, соответственно, получаем

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \mu, \quad f''(0) = \mu(\mu-1), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1).$$

Следовательно, разложение в ряд записывается в виде

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Полученное выражение называется *биномиальным рядом*.

Пример 6

Найти разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение.

Используя формулу биномиального ряда, найденную в предыдущем примере, и подставляя $\mu = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1\cdot x^2}{2^2 2!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^3}{2^3 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{2^4 4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-3)x^n}{2^n n!}.$$

Ограничиваясь первыми 3-мя членами, разложение можно записать в виде

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Приближённое вычисление определённых интегралов

Ряды применяются также для приближённого вычисления интегралов в случаях, когда первообразная не выражается через элементарные функции или нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до ε > 0. Если подынтегральную функцию f (x) можно разложить в ряд и интервал сходимости включает в себя отрезок [a, b], то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до ε = 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена,

заменяя x на ($-x^2$) в формуле $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (ряд Маклорена для функции e^x)

$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Интегрируя обе части этого равенства на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости (− ∞;+∞), получим:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)dx = \left(x - \frac{x^2}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{1!3\cdot 2^3} + \frac{1}{2!5\cdot 2^5} - \frac{1}{3!7\cdot 2^7} + \cdots$$

Получим знакочередующийся ряд. Так как $\frac{1}{2!5\cdot 2^5} = \frac{1}{320} \approx 0{,}031 > 0{,}001$, а $\frac{1}{3!7\cdot 2^7} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то с точностью 0,001 имеем: $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0{,}461$

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 1
1.Разложить в ряд Тейлора по степеням x функции	
y = sin3x	y = cos3x
2.Вычислить с точностью до 0,001путём разложения подинтегральной функции в ряд Маклорена	
1)$\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$	1)$\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$
2)	2)$\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx$	
3) $\int_0^1 cos\sqrt{x}\,dx$	3) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\,cos2xdx$

3.Вывод.

Практическая работа №21 "Погрешности простейших арифметических действий"

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач на нахождение погрешностей простейших арифметических действий.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Различают абсолютную и относительную погрешности. Пусть x - истинное значение величины, $\bar{x}$ - её приближенное значение, принимаемое в расчетах. Величина $l = |x - \bar{x}|$ называется **абсолютной погрешностью** числа $\bar{x}$. Точная верхняя грань множества значений $|x - \bar{x}|$, которое определяется найденным , $\bar{x}$ и имеющейся информацией относительно x, называется **предельной абсолютной погрешностью** величины $\bar{x}$.

Относительной погрешностью δ величины $\bar{x}$ называется отношение её абсолютной погрешности к величине $\bar{x}$: $\boldsymbol{\delta} = \frac{l}{|\bar{x}|}$.

Аналогично можно определить **предельную относительную погрешность** δ_x числа $\bar{x}$:

$$\boldsymbol{\delta}_x = \frac{\boldsymbol{\Delta}_x}{|\bar{x}|}$$

Относительные погрешности чисел принято выражать в процентах, поэтому:

$$\delta = \frac{l}{|\bar{x}|} \cdot 100\% \text{ и } \delta_x = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$$

При записи приближённых чисел желательно указывать их точность, сообщая те границы, в которых это число может находиться: $\bar{x} \pm \Delta_x$.

Значащая цифра числа считается **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность (предельная) не превосходит половины единицы того разряда, в котором стоит данная цифра.
В противном случае цифра считается **сомнительной**.
Значащая цифра числа считается **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность (предельная) не превосходит единицы того разряда, в котором стоит данная цифра.

При записи чисел руководствуются следующим правилом: все цифры числа должны быть верными.
Поэтому округление чисел, записанных в десятичной системе, производится **по правилу первой отбрасываемой цифры**:

- Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставляемые десятичные знаки сохраняются без изменения;
- Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1;
- Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней идут не нули, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1;
- Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, и все цифры, идущие за ней - нули, то последняя оставляемая цифра увеличивается на 1, если она нечетная, и остаётся без изменения, если - четная.

 Ошибки арифметических действий

Если f (x, y) = x + y, то $\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$.
Если f (x, y) = x - y, то $\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y$.
Если f (x, y) = x · y, то $\Delta_{xy} = |\bar{x}| \cdot \Delta_y + |\bar{y}| \cdot \Delta_x$.
Если f (x, y) = $\frac{x}{y}$, то $\Delta_{\frac{x}{y}} = \frac{|\bar{y}| \cdot \Delta_x + |\bar{x}| \cdot \Delta_y}{\bar{y}^2}$.

Из формул для абсолютных погрешностей суммы, разности, произведения и частного выводятся формулы для соответствующих относительных погрешностей.

$$\delta_{x+y} = \frac{\Delta_{x+y}}{|\bar{x}+\bar{y}|} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|\bar{x}+\bar{y}|} = \frac{\Delta_x}{|\bar{x}+\bar{y}|} + \frac{\Delta_y}{|\bar{x}+\bar{y}|} = \frac{|\bar{x}| \cdot \Delta_x}{|\bar{x}+\bar{y}| \cdot |\bar{x}|} + \frac{|\bar{y}| \cdot \Delta_y}{|\bar{x}+\bar{y}| \cdot |\bar{y}|} =$$
$$= \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\delta_x + \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\delta_y$$

$$\delta_{x-y}=\frac{\Delta_{x-y}}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}=\frac{\Delta_x+\Delta_y}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}=\frac{\Delta_x}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}+\frac{\Delta_y}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}=\frac{\left|\bar{x}\right|\cdot\Delta_x}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\cdot\left|\bar{x}\right|}+\frac{\left|\bar{y}\right|\cdot\Delta_y}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|}=$$

$$=\frac{\left|\bar{x}\right|}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}\delta_x+\frac{\left|\bar{y}\right|}{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}\delta_y$$

$$\delta_{xy}=\frac{\left|\bar{y}\right|\cdot\Delta_x+\left|\bar{x}\right|\cdot\Delta_y}{\left|\bar{x}\right|\cdot\left|\bar{y}\right|}(почленно\_разделим)=\frac{\Delta_x}{\left|\bar{x}\right|}+\frac{\Delta_y}{\left|\bar{y}\right|}=\delta_x+\delta_y$$

$$\delta_{\frac{x}{y}}=\frac{\left|\bar{y}\right|\cdot\Delta_x+\left|\bar{x}\right|\cdot\Delta_y}{\bar{y}^2\cdot\left|\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right|}=\frac{\Delta_x}{\left|\bar{x}\right|}+\frac{\Delta_y}{\left|\bar{y}\right|}=\delta_x+\delta_y$$

Если $f(x) = x^n$, то $\Delta_{x^n} = n\cdot\left|\bar{x}^{n-1}\right|\Delta_x$.

Если $f(x)=\sqrt[n]{x}$, то $\Delta_{\sqrt[n]{x}}=\dfrac{1}{n\cdot\left|\sqrt[n]{\bar{x}^{n-1}}\right|}\Delta_x$.

$\delta_{x^n} = n \cdot \delta_x$.

$\delta_{\sqrt[n]{x}}=\dfrac{1}{n}\delta_x$.

Основные задачи теории приближённых вычислений

Прямая задача: указаны действия, которые нужно выполнить и заданы предельные погрешности. Требуется оценить погрешность результата.

Обратная задача: указаны действия, которые нужно выполнить, задана погрешность, которая допустима для результата. Требуется установить, какими должны быть погрешности исходных данных, чтобы полученный результат имел заданную точность.

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 2
1.Оцените относительную погрешность разности двух приближенных чисел a_1 и a_2 , если абсолютные погрешности этих чисел равны Δ_1 и Δ_2	
a_1 = 35,6, a_2= 35,7, Δ_1=Δ_2=0,05	a_1 = 26,6, a_2= 26,7, Δ_1=Δ_2=0,05
2.Вычислите абсолютную погрешность в широком смысле произведения двух чисел a_1 и a_2	

<table>
<tr><td>a_1 =3,3, a_2=35</td><td>a_1 =3,5, a_2=23</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.Найти число верных знаков частного $\frac{a_1}{a_2}$, если все цифры делимого и делителя верны</td></tr>
<tr><td>a_1 =350, a_2=35</td><td>a_1 =230, a_2=23</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.Со сколькими знаками нужно взять a , чтобы относительная погрешность была не более 1%. Указать наименьшее число знаков</td></tr>
<tr><td>$a = 21^{1/2}$</td><td>$a = 23^{1/2}$</td></tr>
</table>

3.Вывод.

Практическая работа №22 "Численное решение алгебраических уравнений"

Цель работы: закрепление практических навыков численного решения алгебраических уравнений.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным

Для большинства уравнений вида $f(x) = 0$ (1), где $f(x)$ - нелинейная функция одной переменной, не существует аналитических выражений (формул) для вычисления их корней. Поэтому приходится применять различные численные методы для отыскания корней уравнения $f(x) = 0$. (1)

Задача нахождения корней уравнения (1) обычно состоит из двух этапов:

1. отделение корня, т.е. установление промежутка, в котором находится корень, причём единственный.
2. уточнение корня, т.е. вычисление приближённого значения корня с заданной точностью.

Для существования корня уравнения (1) на замкнутом промежутке достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы Больцано-Коши.

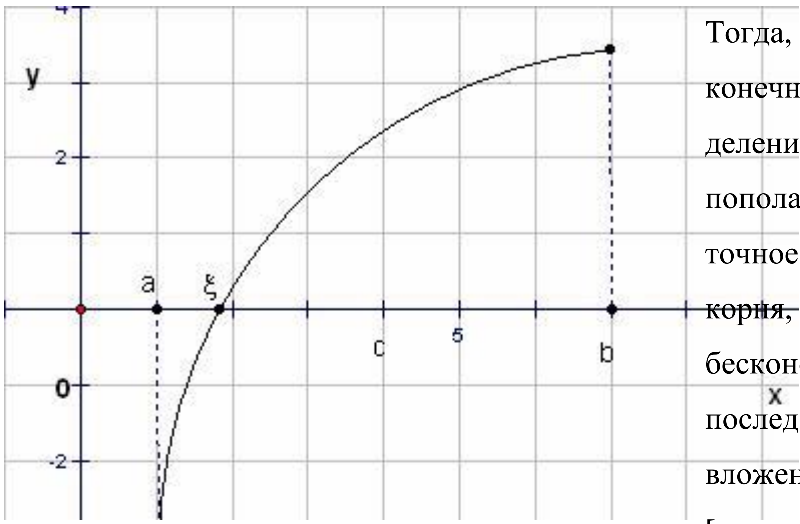
Теорема Больцано-Коши: если функция $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке [a; b] и на концах его принимает значение разных знаков, $f(a) \cdot f(b) < 0$, то между a и b найдётся по крайней мере один корень функции $f(x)$, т.е. найдётся точка c, a < c < b, для $f(c) = 0$.
Для единственности корня функции на замкнутом промежутке, если он существует, достаточно, чтобы функция $f(x)$ была монотонной, т.е. $f'(x)$ сохраняет свой знак на промежутке.

Отделение корня можно произвести графически или аналитически. Таким образом, на 1 этапе нужно найти такой промежуток [a; b], чтобы $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f'(x)$ сохраняла свой знак на [a; b].

Уточнение корня можно произвести одним из следующих методов.

1. Метод половинного деления (метод дихотомии).

Пусть на отрезке [a; b] имеется только один корень уравнения (1). Найдем середину отрезка $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c) = 0$, то корень найден. В противном случае из двух отрезков [a; c] и [c; b] выбираем тот, в котором содержится корень.



С выбранным промежутком делаем то же, что с исходным и т.д. Тогда, либо через конечное число делений отрезка пополам найдём точное значение корня, либо построим бесконечную последовательность вложенных отрезков: $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \ldots \supset [a_n; b_n]$, длины которых стремятся к нулю.

Как только $|b_n - a_n| < E$, где E - заданная точность, то в качестве приближённого значения корня можно взять середину этого отрезка: $\xi = \frac{a_n + b_n}{2}$.

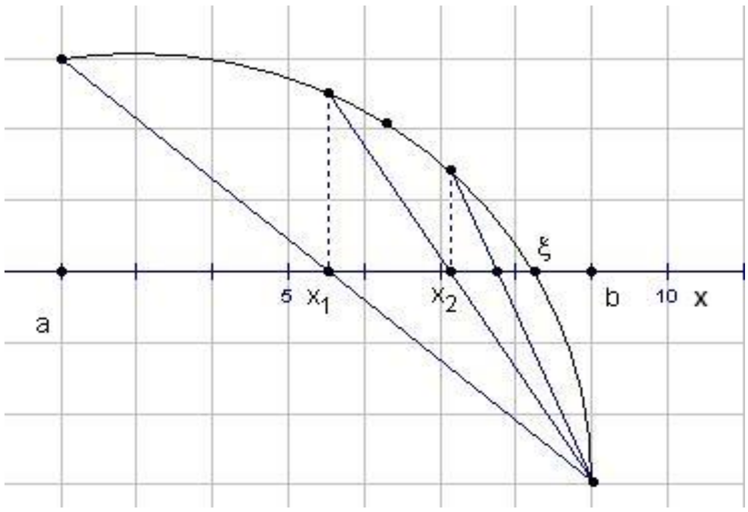
Метод хорд.

Пусть на отрезке [a; b] имеется единственный корень, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$; $f'(x)$ сохраняет свой знак на [a; b]; $f''(x)$ сохраняет свой знак на [a; b].

Заменим дугу кривой $y = f(x)$ на отрезке [a; b] хордой, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Абсцисса точки пересечения хорды с осью Ox есть приближение к корню уравнения (1). Обозначим её через x_1.

Корень уравнения (1) будет находиться между x_1 и одним из концов отрезка [a; b] в зависимости от свойств функции.

Выбрав часть отрезка, содержащую корень, осуществим такое же построение, и получим точку x_2, и т.д. В результате получим последовательность приближённых значений, монотонно сходящуюся к точному значению корня.



Если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot (b - x_{n-1}), n = 1,2,\ldots \\ x_0 = a \end{cases}$$

Если $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = a - \dfrac{f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \cdot (x_{n-1} - a), n = 1,2,\ldots \\ x_0 = b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \cdot (a - x_{n-1}), n = 1,2,\ldots \\ x_0 = b \end{cases}$$

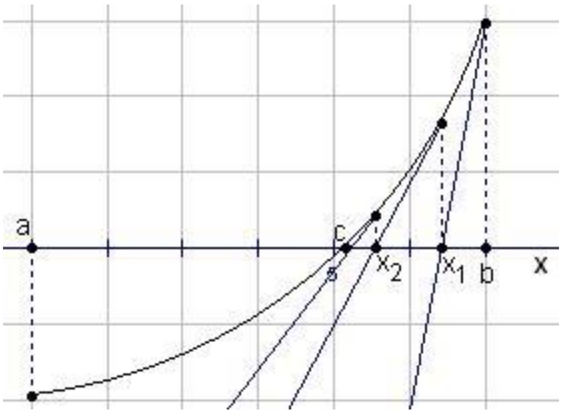
Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями x_n и x_{n-1} станет меньше заданной погрешности E: $|x_n - x_{n-1}| < E$ или когда значение функции $|f(x_n)| < E$.

Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть на отрезке [a; b]:

1. Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свои знаки.

Заменим дугу кривой $y = f(x)$ на [a; b] касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в одной из точек $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Эту точку следует выбирать так, чтобы точка пересечения касательной с осью Ох не вышла за пределы отрезка [a; b]. Абсцисса x_1 точки пересечения касательной с осью Ох принимается за приближённое значение корня c. Выбрав часть отрезка, содержащую корень, осуществим такое же построение и получим точку x_2 и т.д.



В результате получим последовательность приближённых значений $\{x_n\}$, монотонно сходящуюся к точному значению корня c. При этом корень уравнения $f(x) = 0$ находится между x_i и одним из концов промежутка [a; b] в зависимости от свойств функции $y = f(x)$.

Если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \\ x_0 = b \end{cases}$$

Если $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \\ x_0 = a \end{cases}$$

Процесс уточнения корня заканчивается, когда выполняется условие $|x_n - x_{n-1}| < E$, где E - допустимая погрешность вычисления или когда $|f(x_n)| < E$.

Комбинированный метод хорд и касательных

Соединяя метод хорд с методом касательных, получаем метод, на каждом шаге которого находим приближённые значения корня c по недостатку и по избытку: $x_n < c < \overline{x_n}$, причем каждое значение x_n и $\overline{x_n}$ стремится к c.

Если $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления значений по недостатку и по избытку используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, x_0 = a, \\ \overline{x_n} = \overline{x_{n-1}} - \dfrac{f(\overline{x_{n-1}})}{f(x_{n-1}) - f(\overline{x_{n-1}})} \cdot (x_{n-1} - \overline{x_{n-1}}), \overline{x_0} = b \end{cases}$$

Если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ для любого $x \in [a; b]$, то для вычисления значений по недостатку и по избытку используются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f(\overline{x_{n-1}}) - f(x_{n-1})} \cdot (\overline{x_{n-1}} - x_{n-1}), x_0 = a, \\ \overline{x_n} = \overline{x_{n-1}} - \dfrac{f(\overline{x_{n-1}})}{f'(\overline{x_{n-1}})}, \overline{x_0} = b \end{cases}$$

Процесс уточнения корня заканчивается, когда выполняется условие $|\overline{x_n} - x_n| < E$, где E - допустимая погрешность вычисления. При этом в качестве приближённого значения корня принимается середина промежутка $[x_n, \overline{x_n}]$:

$$c \approx \frac{x_n + \overline{x_n}}{2}.$$

Метод простой итерации

По функции $f(x)$ строят функцию $\varphi(x)$ такую, что уравнение $x = \varphi(x)$ (2) эквивалентно уравнению $f(x) = 0$ (1). При этом корень c уравнения (1) является корнем уравнения (2).

Затем строят последовательность $\{x_k\}$ по формуле (3) $x_k = \varphi(x_{k-1})$, k = 1, 2, : начиная с некоторого приближения x_0.

Сходимость последовательности $\{x_k\}$ обеспечивается выбором функции $\varphi(x)$ и выбором начального значения x_0. Выбирая различными способами функцию φ, будем получать различные итерационные методы.

Опишем один из способов получения уравнения (2):

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, |k| = \frac{\max|f'(x)|}{p}$$

, где p - произвольное число. При этом число k имеет тот же знак, что и производная функции *f* на отрезке [a; b] и | *φ ' (x)*| $\le$ q < 1.

Пример 1. Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$

лежащий на отрезке [0, 1] .

Последовательно имеем:

f(0) = - 1; *f*(1) = 1; *f*(0,5) = 0,06 + 0,25 - 0,5 - 1 = - 1,19;

f(0,75) = 0,32 + 0,84 - 0,75 - 1 = - 0,59;

f(0,875) = 0,59 + 1,34 - 0,88 - 1 = + 0,05;

f(0,8125) = 0,436 + 1,072 - 0,812 - 1 = - 0,304;

f(0,8438) = 0,507 + 1,202 - 0,844 - 1 = - 0,135;

f(0,8594) = 0,546 + 1,270 - 0,859 - 1 = - 0,043 и т. д.

Можно принять

$x = \frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867$

Метод хорд

В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения (1) принимаются значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точек пересечения хорды *AB* с осью абсцисс (Рисунок 3). Сначала запишем уравнение хорды *AB*:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для точки пересечения хорды *AB* с осью абсцисс ($x = x_1$, $y = 0$) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды *AB*. Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ (Рисунок 3, *а*) и 2)$f(b) < 0$ (Рисунок 3, *б*).

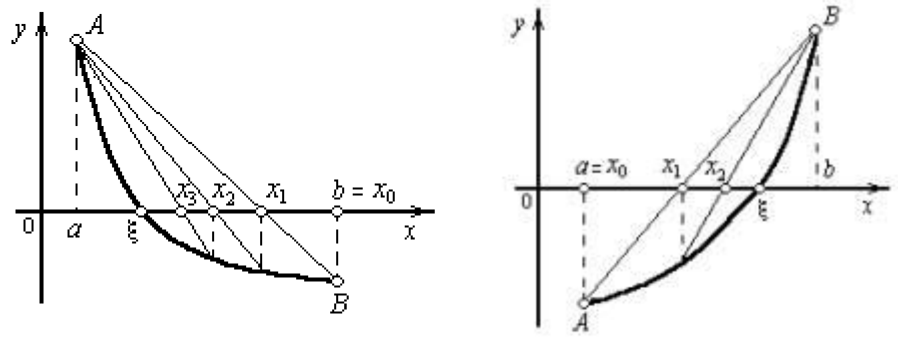


Рисунок 3, а, б.

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения: $x_0 = b$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \qquad 5)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$a < \xi < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0$.

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i) \qquad 6)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \xi < b$.

Обобщая эти результаты, заключаем:

1. неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;
2. последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня x , где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что

$| x_i - x_{i-1}| < e$,

где e - заданная предельная абсолютная погрешность.

***Пример* 2.** Найти положительный корень уравнения

$f(x) = x^3 - 0{,}2\, x^2 - 0{,}2\, x - 1{,}2 = 0$

с точностью e = 0,01.

Прежде всего, отделяем корень. Так как

$f(1) = -0{,}6 < 0$ и $f(2) = 5{,}6 > 0$,

то искомый корень x лежит в интервале [1, 2]. Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$f(1,5) = 1,425 > 0$, то $1 < x < 1,5$.

Так как $f''(x) = 6x - 0,4 > 0$ при $1 < x < 1,5$ и $f(1,5) > 0$, то воспользуемся формулой (5) для решения поставленной задачи:

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6}(1,5 - 1) = 1,15;$$

$|x_1 - x_0| = 0,15 > e$,

следовательно, продолжаем вычисления;

$f(x_1) = -0,173$;

$$x_2 = 1,15 + \frac{0,173}{1,425 + 0,173}(1,5 - 1,15) = 1,190;$$

$|x_2 - x_1| = 0,04 > e$,

$f(x_2) = -0,036$;

$$x_3 = 1,190 + \frac{0,036}{1,425 + 0,036}(1,5 - 1,190) = 1,198;$$

$|x_3 - x_2| = 0,008 < e$.

Таким образом, можно принять x = 1,198 с точностью e = 0,01.

Заметим, что точный корень уравнения x = 1,2.

2.Самостоятельное выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 2
1.Методом половинного деления с точностью до 0,01 найти приближённое значение наибольшего действительного корня алгебраического уравнения	
$4x^3+3x^2-9x + 2 = 0$	$x^3 – 3x^2 – 7x + 4 = 0$
2.Методом хорд с точностью до 0,01 найти приближённое значение наибольшего действительного корня алгебраического уравнения	
$x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = 0$	$x^3 - 2x^2 + 3x – 2 = 0$
3.Методом касательных с точностью до 0,01 найти приближённое значение наибольшего действительного корня алгебраического уравнения	
$x^3 + x^2 - 3 = 0$	$3x^3 – 0,9x – 6 = 0$
4.Методом итераций с точностью до 0,01 найти приближённое значение наибольшего действительного корня алгебраического уравнения	
$x^3 – x + 1 = 0$	$x^3 –2x - 3 = 0$

3.Вывод.

Практическая работа №23 "Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей "

Цель работы: закрепление практических навыков решения простейших задач на определение вероятности события.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Теория вероятностей – это раздел математики изучающий закономерности массовых случайных событий.

Испытанием называется совокупность условий, при котором может произойти данное случайное событие.

Событие – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначаются большими буквами латинского алфавита *A, B,C...*

Случайным называется событие, наступление которого нельзя гарантировать.

События бывают достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания не может произойти.

Случайное событие – это событие, которое при испытаниях может произойти или не может произойти.

События называются несовместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются совместными, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

События образуют полную группу событий, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.

Два несовместных события A и $\bar{A}$ (читается «не A») называются противоположенными, если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти.

Операции над событиями

→ Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

→ Произведением нескольких событий называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Вероятность события – это число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении событий.

Вероятность обозначается буквой P (probability (англ.) – вероятность).

Классическое определение вероятности: Вероятностью P(A) (события A называется отношение числа благоприятствующих исходов **m** к общему числу равновозможных несовместных исходов **n**:

$$\mathbf{P(A)=m/n} \tag{1}$$

Свойства вероятности:

- Вероятность случайного события A находится между 0 и 1.

$$0<P(A)<1 \tag{2}$$

- Вероятность достоверного события равна 1.

$$P(A)=m/n=n/n=1 \qquad (3)$$

- Вероятность возможного события равна 0

$$P(A)=m/n=0/n=0 \qquad (4)$$

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном осуществлении всех этих событий

Теоремы сложения вероятностей

- Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (5)$$

- Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B). \qquad (6)$$

Теорема умножения вероятностей

- Вероятность произведения 2 независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A*B)=P(A)*P(B) \qquad (7)$$

Решение задач

Пример1 Найти вероятность выпадения числа кратного 3 при одном бросании игрального кубика.

Решение:

Событие А – выпадение числа кратного 3. Этому событию благоприятствуют два исхода: числа 3 и 6, т.е. m=2. Общее число исходов состоит в выпадении чисел: 1,2,3,4,5,6, т.е. n=6. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу. Тогда искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов. P(A)=m/n=2/6=1/3.

Пример2 В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

Решение:

Число исходов, благоприятствующих событию А, равно сумме красных и зеленых шаров:m=10. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне:n=20.Тогда: P(A)=m/n=10/20=0,5

Пример 3 Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости

Решение:

Событие А – выпадение цифры 2, вероятность этого события P(A)=1/6. Событие В – выпадение цифры 3, вероятность этого события P(B)=1/6. События несовместные, поэтому

P(A+B)=P(A)+P(B)=1/6+1/6=2/6=1/3.

Пример 4 Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из низ 20 комплектов мужской одежды, 6 – женской и14 – детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской.

Решение:

Событие А – одежда мужская, вероятность P(A)=20/40=1/2
Событие В – одежда женская, P(B)=6/40=3/20
Событие С –одежда детская, P(C)=14/40=7/20.
Тогда P(A+C)=P(A)+P(C)=1/2+7/20=17/20.
В этом случае, если события А и В являются совместными, то справедлива следующая

теорема.

Пример 5 Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго 0,6. Определить вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах двух стрелков.

Решение:

Так как при стрельбе возможно попадание в мишень двумя стрелками, то эти события совместные, следовательно

$P(A+B)= P(A)+P(B)-P(A*B)=0,65+0,6-0,39=0,86$.

Пример6 В урне находятся 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Первым был вынут черный шар, найти вероятность того, что второй шар будет черным.

Решение:

Вероятность появления черного шара первый раз (событие В) равно $P(B)=3/10$; а вероятность появления его второй раз (событие А), при условии, что событие В произошло, равно $P(A/B)=2/9$, т.к. в урне осталось 9 шаров, из них 2 черных.

Рассмотрим закон умножения вероятностей для независимых событий.

Произведением двух событий А и В называют событие $C=A*B$, состоящее в совместном осуществлении этих событий.

Пример 7 В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение:

Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2, и A_3,а их вероятности соответственно равны:

$P(A_1)=30/40=3/4$; $P(A_2)=15/30=1/2$; $P(A_3)=10/30=1/3$.

Тогда вероятность правильного ответа на билет Р(В), можно найти по формуле

$P(B)= P(A_1)*P(A_2)*P(A_3)=3/4*1/2*1/3=1/8=0,125$.

2.Самостоятельнле выполнение заданий.

Вариант 1	**Вариант 2**
1). Из партии, в которой 4 стандартные и 7 бракованных деталей, случайным образом	1). Из корзины, в которой 8 красных и 5 синих и 3 белых шара, случайным образом

вынимают 4 детали. Найти вероятность, что среди них имеются: а) 2 стандартные детали; б) хотя бы 1 деталь стандартная.	вынимают 2 шара. Найти вероятность, что они: а) оба красные; б) хотя бы 1 красный.
2)Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один?	2) Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания 1-м - 0,8, 2-м – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина?
3) В пирамиде 7 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели простой винтовкой 0, 58, а с оптическим прицелом 0, 93. Найти вероятность того, что стрелок поразит цель, стреляя случайно взятой винтовкой.	3) В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных. Во втором ящике 30 деталей, из них 24 стандартные. А в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартные. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

3.Вывод.

Практическая работа №24 "Построение закона распределения дискретной случайной величины по заданному условию"

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач на построение закона распределения дискретной случайной величины по заданному условию.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Закон распределения дискретных и непрерывных случайных величин

Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины может быть задано в виде таблицы, в графическом и аналитическом виде.

Пусть дискретная величина X принимает значения $X=x_1$, $X=x_2,\ldots$, $X=x_n$. Обозначим вероятности этих событий соответственно: $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2,\ldots$, $P(X = x_n) = p_n$.

Таблица, содержащая возможные значения случайной величины и соответствующие вероятности, является простейшей формой задания распределения дискретной случайной величины:

Значение случайной величины x_1	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности значений p_1	p_1	p_2	…	p_n

Так как в результате испытания случайная величина X всегда примет одно из своих возможных значений x_1, x_2, … x_n, то эти случайные события образуют полную группу событий и

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1)$$

Табличную формулу задания называют также рядом распределения. Для наглядности ряд распределения можно представить в графическом виде, где по оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат вероятности этих значений.

В ряде практических случаев вместо вероятности того, что случайная величина X принимает некоторое определённое значение x_i ,необходимо знать, что случайная величина X меньше x_i. Эта вероятность задаётся интегральной функцией распределения.

Функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее фиксированного действительного числа x, т.е.

$F(x) = P(X < x)$.

Функцию распределения F(x) иногда называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функцию F(x) можно получить, суммируя значения вероятностей по тем значениям случайной величины, которые меньше x_i, т. е.

$F(x_i) = P(X < x_i) = \sum P(x_i)$ $x<x_i$

где неравенство $x < x_i$ под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на все значения x меньше x_i.

Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую функцию. Когда переменная x принимает какое - нибудь из своих возможных значений, функция распределения увеличивается скачкообразно на величину вероятности этого значения. Причём при переходе слева к точкам разрыва функция сохраняет своё значение.

Функция f(x) называют дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения непрерывной случайной величины X.

Геометрический смысл плотности распределения вероятностей f(x) заключается в следующем: зная f(x) можно вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу (a, b):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Решение задач

Пример 1. Построить график ряда распределения значений частоты пульса в гипотетической группе из 47 человек по заданной таблице

Значения случайной величины уд/мин	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Значения вероятности *p (xi)*	$\frac{2}{47}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{5}{47}$	$\frac{7}{47}$	$\frac{7}{47}$	$\frac{6}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{3}{47}$	$\frac{3}{47}$

Решение:

По данным таблицы построен график, который является многоугольником распределения вероятностей.

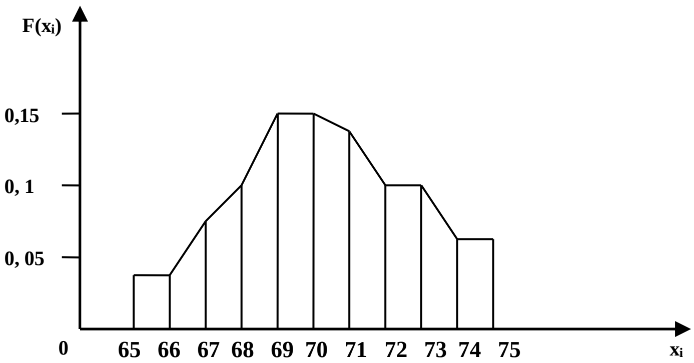


Рис. .. График распределения частоты пульса в группе из 47 человек

Пример 2. Подбрасываем 1 раз кубик. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ количество очков, выпавшее при бросании кубика. Записать соответствие между значениями случайных величин x и p вероятностями принимать эти значения в виде «таблицы распределения вероятностей» или, коротко, «таблицы распределения».

Решение:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2.Самостоятельнле выполнение заданий.

Вариант 1	Вариант 2
1. Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени Т безотказно соответственно с вероятностями 0,97, 0,97, 0,97. Составить закон распределения числа отказавших приборов	1. В квартире шесть электрических лампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 5/6. Составить закон распределения числа отказавших лампочек
2. Вероятность появления события А в каждом из восьми независимых испытаний рана 0,6. Составить закон распределения числа появлений события А	2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,75. Произведена серия из четырех выстрелов. Составить закон распределения числа попаданий

3.Вывод.

Практическая работа №25 "Нахождение математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины, заданной законом распределения"

Цель работы: закрепление практических навыков решения задач на нахождение математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Ход работы:

1)повторение теоретического материала;

2)выполнение заданий;

3)вывод.

1.Краткое содержание теоретического материала.

Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Но при решении ряда практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые в сжатой форме дают достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются числовыми характеристиками случайной величины. Основными из них являются: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений всех возможных её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i \qquad (1)$$

Свойства математического ожидания

− Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: M(C) = C

− Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M\,(CX) = CM\,(X)$$

− Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равна алгебраической сумме их математических ожиданий:

$$M\,(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$$

Две случайные величины X и Y называются независимыми, если распределение одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

- Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.
- $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$
- Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания всегда равно нулю:
- $M(X - M(X)) = 0$

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания M (X) называют дисперсией случайной величины X и обозначают D(X), т.е.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (2)$$

Дисперсия характеризует рассеяние (отклонение) случайной величины относительно математического ожидания.

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и её неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии – среднее квадратическое отклонение. Эта величина даёт представлять о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

$$\sigma \text{ (сигма)} = \sqrt{D(X)} \quad (3)$$

Основные свойства дисперсии:

- Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин, т.е.

$D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$

- Дисперсия постоянной величины C равна нулю, т.е.

$D(C)=0$.

- Постоянный множитель C случайной величины X можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат, т.е.

$D(CX) = C^2 D(X)$

- Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом её математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (4)$$

Решение задач

Пример1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон её распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Решение:

По формуле находим:

$M(X) = -1 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}05 = 11$

Пример 2. Случайная величина задана следующим рядом распределения.

X	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение:

Для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой, а для дисперсии результаты вычисления сведём в таблицу

x	p_i	$x_i p_i$	$x_i – M(x)$	$(x_i – M(X))^2$	$(x_i – M(X))^2 p_i$
-1	0,1	-0,1	-1,7	2,89	0,289
0	0,3	0	-0,7	0,49	0,147
1	0,4	0,4	0,3	0,09	0,036
2	0,2	0,4	1,3	1,69	0,338
∑	1	0,7			0,81

Из таблицы следует, что M(X) = 0,7; D(X) = 0.81

2.Самостоятельнле выполнение заданий.

<table>
<tr><td>Вариант 1</td><td>Вариант 2</td></tr>
<tr><td>1.Случайная величина X задана законом распределения:
<table><tr><td>X_i</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,4</td><td>0,5</td></tr></table>
Найти математическое ожидание M(X),</td>
<td>1.Случайная величина X задана законом распределения:
<table><tr><td>X_i</td><td>0,1</td><td>2</td><td>10</td><td>20</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,15</td><td>0,25</td></tr></table>
Найти математическое ожидание</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).</td>
<td>M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).</td>
</tr>
<tr>
<td>2.Случайная величина X задана законом распределения:
<table>
<tr><td>X_i</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,48</td><td>0,01</td><td>0,09</td><td>0,42</td></tr>
</table>
Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).</td>
<td>2.Случайная величина X задана законом распределения:
<table>
<tr><td>X_i</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,19</td><td>0,51</td><td>0,25</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение σ(X).</td>
</tr>
</table>

3.Вывод.