

Министерство образования Новосибирской области
государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Новосибирской области
«НОВОСИБИРСКИЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель директора
по учебной работе
«__»_____2020г.
_____С.В. Белина

Директор С.С. Лузан

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

По выполнению практических работ

ОП.02 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для студентов специальности

09.02.05 Прикладная информатика

2020 г.

Методические указания разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее – СПО) 09.02.05 «Прикладная информатика», входящей в состав укрупненной группы специальностей 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника».

Организация-разработчик: государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области «Новосибирский профессионально-педагогический колледж»

Разработчик:

Бочкарёва Д.В., преподаватель

Одобрено на заседании предметно-цикловой комиссии
информационных технологий и социально-правовых дисциплин

Протокол №1 от «1 сентября 2020г.

Председатель ПЦК _____ /Ануфриева О.Ю./

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	4
<i>Практическая работа № 1</i> Алгебра событий. Решение задач	6
<i>Практическая работа № 2</i> Комбинаторика	8
<i>Практическая работа № 3</i> Классическое определение вероятности. Решение задач	10
<i>Практическая работа № 4</i> Геометрическое определение вероятности. Решение задач	13
<i>Практическая работа № 5</i> Условная вероятность. Решение задач	14
<i>Практическая работа № 6</i> Теоремы сложения и умножения вероятностей. Решение задач	16
<i>Практическая работа № 7</i> Формула полной вероятности. Решение задач	18
<i>Практическая работа № 8</i> Формула Байеса. Решение задач	19
<i>Практическая работа № 9</i> Формула Бернулли. Решение задач	20
<i>Практическая работа № 10</i> Приближенные формулы в схеме Бернулли	22
<i>Практическая работа № 11</i> Дискретная случайная величина. Решение задач	23
<i>Практическая работа № 12</i> Непрерывная случайная величина. Решение задач	25
<i>Практическая работа № 13</i> Числовые характеристики НСВ	26
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ	29

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по учебной дисциплине *ОП.02 Теория вероятностей и математическая статистика* для студентов специальности 09.02.05 *Прикладная информатика (по отраслям)* разработаны в соответствии с ФГОС СПО третьего поколения (утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 14.05.2014 № 525, зарегистрированный Министерством юстиции (рег. № 32962 от 03.07.2014)) и рабочей программой учебного курса.

В соответствии с ФГОС СПО по дисциплине *Теория вероятностей и математическая статистика* учебным планом предусмотрено 64 часа аудиторных занятий, в том числе 26 часов отведено на практические работы. Продолжительность занятия указывается в каждой работе.

Ведущей дидактической целью содержания практических работ является решение задач и выполнение расчетов.

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи работы, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы.

Наличие положительной оценки по практической работе необходимо для получения зачета по дисциплине и допуска к экзамену, поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной отметки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Если в процессе подготовки к практической работе или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Каждая практическая работа содержит цель, методическое руководство к выполнению, содержание работы, форму предъявления отчета, критерии оценки.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

<i>№ п/п</i>	<i>Название работы</i>	<i>Кол-во часов</i>
1	<i>Практическая работа № 1</i> Алгебра событий. Решение задач	2
2	<i>Практическая работа № 2</i> Комбинаторика	2
3	<i>Практическая работа № 3</i> Классическое определение вероятности. Решение задач	2
4	<i>Практическая работа № 4</i> Геометрическое определение вероятности. Решение задач	2
5	<i>Практическая работа № 5</i> Условная вероятность. Решение задач	2
6	<i>Практическая работа № 6</i> Теоремы сложения и умножения вероятностей. Решение задач	2
7	<i>Практическая работа № 7</i> Формула полной вероятности. Решение задач	2
8	<i>Практическая работа № 8</i> Формула Байеса. Решение задач	2

9	<i>Практическая работа № 9</i> Формула Бернулли. Решение задач	2
10	<i>Практическая работа № 10</i> Приближенные формулы в схеме Бернулли	2
11	<i>Практическая работа № 11</i> Дискретная случайная величина. Решение задач	2
12	<i>Практическая работа № 12</i> Непрерывная случайная величина. Решение задач	2
13	<i>Практическая работа № 13</i> Числовые характеристики НСВ	2
Итого		26

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа № 1

Алгебра событий. Решение задач

Цель: знать виды событий; уметь определять вид события.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

В теории вероятностей первичными понятиями являются испытания и события. Пусть проводится некоторое испытание со случайным исходом. Множество всех возможных взаимоисключающих исходов данного испытания называется **множеством элементарных событий**. Совокупность всех элементарных событий называется **достоверным событием**. Всякое подмножество множества элементарных событий называется **случайным событием**.

Различают три типа событий: достоверное, невозможное и случайное.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно произойдет. Обозначение достоверного события: Ω .

Событие называется **невозможным**, если в результате испытания оно никогда не произойдет. Обозначение: I (impossible) или $\emptyset$.

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может произойти, а может и не произойти. Обычно случайные события обозначают латинскими буквами: A , B , C и т.д.

Например, проводится **испытание**: подбрасываем одну монету, в результате этого испытания может быть всего **два исхода**: выпал герб, выпала решка (выпадение на ребро достаточно редкий исход, мы такие исходы рассматривать не будем), т. е. в результате испытания может произойти одно из **элементарных событий**: $A = \{\text{выпал герб}\}$, $B = \{\text{выпала решка}\}$.

Например, проводим испытание: случайным образом вынимаем два шара из ящика, в котором 1 белый и 3 черных шара, тогда событие $\Omega = \{\text{вынули хотя бы один черный шар}\}$ является достоверным, потому что двух белых в ящике нет, событие $I = \{\text{вынули зеленый шар}\}$ - невозможным, событие $A = \{\text{вынули два разных по цвету шара}\}$ - случайным.

Суммой двух событий A и B называется такое событие $C = A + B$ (или $A \cup B$), которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B . 5

Произведением двух событий A и B называется такое событие $C = AB$ (или $A \cap B$), которое состоит в наступлении событий A и B вместе.

Например, проводится **испытание**: подбрасываем игральную кость, в результате этого испытания может произойти одно из шести элементарных $A_1 = \{\text{выпало 1 очко}\}$, $A_2 = \{\text{выпало 2 очка}\}$, $A_3 = \{\text{выпало 3 очка}\}$, $A_4 = \{\text{выпало 4 очка}\}$, $A_5 = \{\text{выпало 5 очков}\}$, событий: $A_6 = \{\text{выпало 6 очков}\}$, выпадение на ребро достаточно редкий исход, мы такие исходы рассматривать не будем. Событие $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ является достоверным. На множестве Ω можно ввести и другие случайные события: $A = \{\text{выпало нечетное число очков}\}$, $B = \{\text{выпало четное число очков}\}$, $C = \{\text{выпало простое число очков}\}$, и т.п., но

они уже, не являются элементарными событиями, т.к., их можно представить в виде объединения элементарных событий:

$$A = A_1 \cup A_3 \cup A_5; \quad B = A_2 \cup A_4 \cup A_6; \quad C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$$

Два события называются **несовместными**, если в результате одного испытания они не могут произойти одновременно, т.е. $A \cap B = \emptyset$.

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **попарно несовместными**, если каждая пара не может произойти одновременно, т.е. каждое не может произойти с остальными.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют **полную группу**, если в результате испытания происходит хотя бы одно из них, и ничего кроме этих событий не может произойти.

События A и $\bar{A}$ называются **противоположными**, если $A + \bar{A} = \Omega$, $A \cdot \bar{A} = 1$. Очевидно, что события A и $\bar{A}$ несовместны.

Пример 1. Проведем испытание: один раз бросаем игральную кость. Рассмотрим события: $A_1 = \{\text{выпало четное число очков}\}$, $A_2 = \{\text{выпало нечетное число очков}\}$, $A_3 = \{\text{выпало три очка}\}$ и $A_4 = \{\text{выпало пять очков}\}$. Указать события, которые являются совместными, несовместными, попарно несовместными и т.п.

Решение. События A_2 и A_3 являются совместными, т.к. они могут произойти одновременно, в случае, если выпадет три очка. События A_3 и A_4 - несовместные. События A_1, A_3 и A_4 - попарно несовместные. События A_2, A_3 и A_4 - не являются попарно несовместными, поскольку, например, A_2 и A_4 могут произойти одновременно. События A_1, A_2, A_3 и A_4 образуют полную группу, поскольку $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. События A_1 и A_2 образуют полную группу несовместных событий, поскольку $A_1 \cup A_2 = \Omega$, а $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. События A_1, A_3, A_4 не образуют полную группу, так как $A_1 \cup A_3 \cup A_4 = \{2, 3, 4, 5, 6\} \neq \Omega$, поскольку может выпасть одно очко.

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить задания в тетради.

Задача 1. В урне находятся 20 пронумерованных шаров. Случайным образом вынимают один из них. Определите, какие из следующих событий являются достоверными, невозможными, противоположными: достали шар с четным номером (событие А), достали шар с нечетным номером (событие В), достали шар без номера (событие С)?

Задача 2. В урне находятся белые и черные шары. Случайным образом из урны достают один из шаров. Определите, какие из событий А, В, С являются несовместными, противоположными, возможными и невозможными, если событие А – достали белый шар, событие В – достали черный шар, событие С – достали синий шар?

Задача 3. Являются ли возможными и невозможными события, состоящие в том, что при однократном бросании кости выпадет 5 очков, 7 очков, от 1 до 6 очков? Какие события в этом испытании образуют полную группу событий?

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.
Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 2

Комбинаторика

Цель: научиться распознавать типы соединений и вычислять их; научиться решать простейшие комбинаторные задачи.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «сколькими способами?».

Правило умножения (основной принцип): если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

Решение. Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 2, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т. е. искомое количество трехзначных чисел есть 60. (Вот некоторые из этих чисел: 243, 541, 514, 132, ...) Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. (Вот некоторые из них: 255, 333, 414, 111, ...)

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Пример 2. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей - $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

Решение вероятностных (и не только их) задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте (эксперименте), состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Размещениями из n элементов по m ($0 < m \leq n$) элементов называются соединения, каждое из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов. При этом размещения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \quad (1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1. \quad (2)$$

Пример 3. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: (a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a) , (b, c) , (c, b) . Согласно формуле (1) их число: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$. (3)

Пример 4. Составить различные перестановки из элементов множества $E = \{2, 7, 8\}$; подсчитать их число.

Решение. Из элементов данного множества можно составить следующие перестановки: $(2, 7, 8)$; $(2, 8, 7)$; $(7, 2, 8)$; $(7, 8, 2)$; $(8, 2, 7)$; $(8, 7, 2)$. По формуле (3) имеем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Сочетаниями из n элементов по m ($0 < m \leq n$) элементов называются соединения, каждое из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов. Эти соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В отличие от размещений, порядок следования элементов здесь не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. (4)

Пример 5. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: (a, b) , (a, c) , (b, c) . Их число: $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$.

Задание: Найти значение выражения. Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить задания в тетради.

Вариант 1.

1. Вычислить:

а) $7!$

б) $\frac{10!}{5!}$

в) $P_4 + P_3$

2. Сократите дробь: $\frac{(n+1)!}{n!}$

3. Решите уравнение: $2P_x = 12$

4. Решите задачи:

а) Сколькими способами можно расставить девять книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

б) Необходимо выбрать в подарок четыре книги из десяти. Сколькими способами это можно сделать?

в) По списку в классе 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выбрать троих дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать при условии, что пару обязательно должны составить мальчик и девочка.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 3

Классическое определение вероятности. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по классической формуле.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Предмет теории вероятностей - изучение вероятностных закономерностей, возникающих при рассмотрении массовых однотипных случайных событий.

Событие - это любое явление, в отношении которого имеет смысл говорить, наступило оно или не наступило, в результате определенного комплекса условий или случайного эксперимента. Обозначаются события заглавными латинскими буквами $A, B, \dots$

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m – элементарных исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A , к числу n – всех возможных элементарных исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1. Найти вероятность, что при бросании монеты выпадет герб.

Решение. При бросании монеты имеются два равновозможных исхода: “выпадение герба” и “выпадение решки” ($n = 2$). Для события A – “выпадение герба” благоприятен только один из них $m = 1$. Значит, вероятность $P(A) = \frac{1}{2}$.

Вероятность любого события заключена между нулем и единицей $0 \leq P(A) \leq 1$

Можно выделить следующие виды случайных событий:

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно происходит при каждом осуществлении определенной совокупности условий. Вероятность достоверного события B равна единице: $P(B) = 1$.

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдет ни при одном осуществлении данной совокупности условий. Вероятность невозможного события C равна нулю: $P(C) = 0$.

Событие называется **случайным**, если оно может произойти, а может и не произойти при осуществлении данной совокупности условий.

События называются **несовместными**, если их одновременное появление при осуществлении комплекса условий невозможно, т.е. появление события A в данном испытании исключает появление события B в этом же испытании.

События называются **единственновозможными**, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Если событие A – какое-либо событие, то событие, состоящее в том, что событие A не наступило, называется **противоположным** событию A и обозначается как $\bar{A}$.

События, происходящие при реализации определенного комплекса условий или в результате случайного эксперимента, называются **элементарными исходами**.

Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Примеры:

1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т. е. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

2. Сколько «слов» по две буквы можно составить из букв a, b, c, d, e , таким образом, чтобы буквы в «словах» не повторялись?

Решение. Т.к. каждое «слово» должно содержать две буквы, то искомое число способов равно числу размещений из 5 элементов (букв) по две, т. е. $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$.

3. Сколькими способами можно выбрать 1 красную гвоздику и 2 розовых из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики?

Решение. Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то красную гвоздику можно выбрать $C_{10}^1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{9!} = 10$ способами. Выбрать две розовые гвоздики из

имеющихся четырех можно $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способами. Поэтому букет из одной

красной и двух розовых гвоздик можно составить, по правилу умножения, $C_{10}^1 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ способами.

4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что номер телефона набран правильно.

Решение. Благоприятствующий исход здесь один – правильный набор последних цифр ($m=1$). Всех возможных исходов здесь будет столько, сколько можно составить комбинаций из 3 цифр, порядок которых имеет значение, значит $n = A_{10}^3 = 720$. Значит вероятность того, что номер набран правильно (событие A): $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$.

5. Среди 100 колес 5 нестандартных. Для контроля выбирается 7 колес. Найти вероятность того, что среди них ровно 3 будет нестандартных.

Решение. Число всевозможных исходов равно количеству комбинаций из 100 колес по 7 штук, т.к. порядок значения не имеет, то $n = C_{100}^7$. Благоприятствующий исход состоит в выборе ровно 3 нестандартных колес из 5 и совместном выборе (7-3) стандартных колес из (100-5), порядок значения не имеет. По правилу произведения $m = C_5^3 \cdot C_{95}^4$. Следовательно, вероятность того, что среди взятых для контроля колес будет ровно 3 нестандартных (событие A): $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{95}^4}{C_{100}^7} = \frac{17967600}{90345024} \approx 0,199$.

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Вариант 1.

1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:
 - а) выпадет четное число очков
 - б) выпадет число очков, кратное трем.
2. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 р., на четыре билета – выигрыш по 50 р., на 10 билетов – выигрыш по 20 р., на 20 билетов – выигрыш по 10 р., на 165 билетов – выигрыш по 5 р., на 400 билетов – выигрыш по 1 р. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?
3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.
4. В партии из 50 деталей имеется 3 бракованных. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.
5. В ящике находится 4 белых и 1 черный шар. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что вынуты два белых шара.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 4

Геометрическое определение вероятности. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по классической формуле.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области g к площади области G , т. е. $P(A) = \frac{S_g}{S_G}$

Область g называется **благоприятствующей (благоприятной)** событию A .

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть одномерной (прямая, отрезок) и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Обозначая меру (длину, площадь, объем) области через mes , можно записать

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$$

Примеры:

6. В некоторой точке C линии AB длины L произошел разрыв. Какова вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние не меньше l ?

Решение.

Расположим отрезок AB на числовой оси Ox так, как изображено на рис. 2.

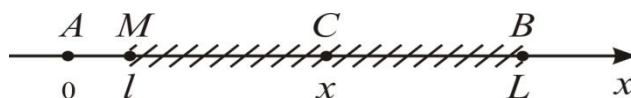


Рис. 1

Пусть x – координата случайной точки C отрезка AB , $0 \leq x \leq L$. Ясно, что исходов опыта (разрыв линии AB в точке C) бесчисленное множество и все они равновозможны. На отрезке AB возьмем точку M , расстояние которой от точки A , равно l .

Очевидно, что событие $A = \{\text{точка } C \text{ удалена от точки } A \text{ на расстояние не меньше } l\}$ произойдет, если точка C попадет на отрезок $MB = [l, L]$.

Таким образом, областью, благоприятствующей наступлению события A (на рис. 1 она заштрихована), является отрезок MB , а множеству исходов опыта соответствует отрезок $AB = [0, L]$.

$$\text{Тогда по формуле } P(A) = \frac{MB}{AB} = \frac{L-l}{L} = 1 - \frac{l}{L}.$$

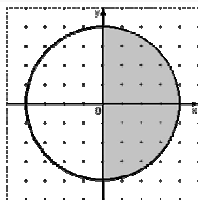
Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

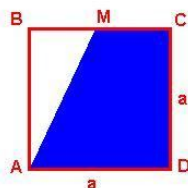
1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задачи:

1. В прямоугольник $5 \times 4 \text{ см}^2$ вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?
2. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см. Случайным образом внутри квадрата отмечена точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?
3. Мишень имеет форму окружности радиуса 4. Какова вероятность попадания в ее правую половину, если попадание в любую точку мишени равновероятно? При этом промахи мимо мишени исключены.



4. Дано: $AB = 12 \text{ см}$, $AM = 2 \text{ см}$, $MN = 4 \text{ см}$. На отрезок AB случайным образом попадает точка X . Какова вероятность того, что X попадет на отрезок MB ?
5. В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка X . Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции $AMCD$, где точка M - середина стороны BC ;



Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 5

Условная вероятность. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по условной вероятности.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Пусть A — событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадает шестерка. Тогда, очевидно, $P(A) = 1/6$.

Представим себе, далее, что в результате бросания игральной кости выпала четная цифра, то есть произошло событие $B = \{2, 4, 6\}$.

С какой вероятностью выпавшей цифрой тогда будет шестерка?

Ответ на этот вопрос мы будем записывать в виде $P(A|B)$ и называть **условной вероятностью события A относительно события B** . Очевидно, что здесь нужно говорить не о шести исходах $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а лишь о трех равновозможных исходах $\{2, 4, 6\}$, один из которых обеспечивает наступление события A .

Иными словами, естественно считать, что $P(A|B) = 1/3$.

Рассмотренный пример допускает следующее естественное обобщение. Пусть A и B — произвольные случайные события, связанные с одним и тем же опытом (укладывающимся в классическую схему). В уже привычных для нас обозначениях отношение N_{AB}/N_{BA} (при $N_B \neq 0$) можно рассматривать как долю тех элементарных исходов, благоприятствующих событию B , которые благоприятствуют и событию A . Такое отношение называется **условной вероятностью события A относительно B** (или при условии B) и обозначается $P(A|B)$. Итак, при $N_B \neq 0$ $P(A|B) = N_{AB}/N_B$. По этой формуле в классической схеме теории вероятностей и вычисляются условные вероятности.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A уже произошло. Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (P(B) \neq 0).$$

Пример. Из урны, в которой первоначально было 10 белых и 5 черных шаров, потеряны 2 каких-то шара. После этого из нее наугад извлекли одновременно 3 шара и все они оказались белыми. Какова вероятность того, что оба потерянных шара были черными?

Решение. Отмеченные в условии задачи три белых шара, разумеется, не имели никакого отношения к «потере двух каких-то шаров». Следовательно, потерянными были шары из числа остальных семи белых и пяти черных шаров. Отсюда искомая вероятность

$$p = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2}}{\frac{12 \cdot 11}{2}} = \frac{5}{33}$$

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задача 1. Из урны, в которой первоначально было 10 белых, 5 черных и 1 оранжевый шар, пропал какой-то шар. После этого из нее извлекли наугад 2 шара: один из них оказался белым, а другой — черным. Какова вероятность того, что из урны пропал оранжевый шар?

Задача 2. Трехтомник стихотворений расположен на книжной полке в случайном порядке. Найдите:

- а) вероятность того, что первый том будет расположен на своем естественном (порядковом) месте;
- б) условную вероятность того, что первый том окажется на первом месте, при условии, что вторым на полке стоит второй том.

Задача 3. Двое по одному разу подбрасывают игральную кость. Выигрывает тот игрок, у кого выпадает больше очков. Найдите:

- а) вероятность победы первого игрока;

б) условную вероятность того, что победит первый игрок, при условии, что победитель будет определен.

Задача 4. В семье двое детей. Известно, что по крайней мере один из них — мальчик. Какова вероятность того, что другой ребенок в семье — тоже мальчик?

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 6

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Решение задач

Цель: закрепить и проверить знания и умения по нахождению вероятности сложных событий.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Теорема 1: Вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема 2: Вероятность суммы двух **совместных** событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, т.е. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Пример 1. Найти вероятность **суммы противоположных** событий.

Решение: События A и $\bar{A}$ несовместны, следовательно $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Сумма двух противоположных событий есть событие достоверное, поэтому $P(A + \bar{A}) = 1$. Тогда $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Отсюда следует :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Пример 2. В урне 3 красных, 5 синих и 2 белых шара. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

Решение: Пусть событие A- вынут синий шар, событие B- красный шар. Эти события несовместны. Интересующее событие- вынут цветной шар, означает, что вынут красный или синий, т.е. событие A+B. используем теорему о сумме несовместных событий $P(A+B)=P(A)+P(B)$. вычислим вероятности событий A и B:

$P(A)=5/10=1/2$; $P(B)=3/10$. Тогда искомая вероятность равна $P(A+B) = 1/2+3/10=8/10=0,8$.

Пример 3. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение. Пусть событие $A_i = \{\text{выигрыш по } i\text{-му билету}\}$, $i=1, 2, 3, 4$. События A_i - совместные, но независимые.

а) По формулам (8) и (4) вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \\ &= \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098. \end{aligned}$$

Теорема 3: Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло, т.е. $P(AB) = P(A)P_A(B)$

Теорема 4: Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей $P(AB) = P(A)P(B)$.

Пример 4. По мишени стреляют три стрелка. Вероятности попадания соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что попадут все три.

Решение:

Пусть событие A – попал 1-й, B – 2-й и C – 3-й. Эти события независимые, тогда применяя соответствующую теорему получим, что вероятность совместного появления всех трех событий равна: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504$.

Пример 5. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 75 % небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение. Пусть событие $A = \{\text{выбранное изделие небракованное}\}$, событие $B = \{\text{небракованное изделие удовлетворяет требованиям первого сорта}\}$, событие $C = \{\text{выбранное наудачу изделие первосортное}\}$. Событие C представляет собой произведение событий A и B : $C = AB$. По условию $P(A) = 1 - 0,04 = 0,96$, $P(B/A) = 0,75$. Тогда по теореме умножения вероятностей (см. 2.1) искомая вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72$.

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задача 1. Найти вероятность того, что из колоды, содержащей 36 карт, вынут туз или пиковую масть.

Задача 2. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – волейболом и баскетболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

Задача 3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при выстреле для первого стрелка равна 0,75, а второго – 0,7. Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень при залпе?

Задача 4. В первой урне находится 7 белых и 4 черных шара, во второй – 6 белых и 3 черных шара. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Задача 5. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя первого элемента 0,2; второго – 0,3; третьего – 0,2. Какова вероятность того, что: а) все три элемента выйдут из строя; б) Все элементы будут работать.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» – все задачи решены верно.

Оценка «4» – все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.
Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 7

Формула полной вероятности. Решение задач

Цель: закрепить и проверить знания и умения по нахождению полной вероятности.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Вероятность $P(B)$ появления события B , которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е. $H_i \cdot H_j \neq \phi, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n H_i = D$, вычисляется по **формуле полной вероятности**

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(B/H_i), \text{ где } \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

При этом события $H_1, H_2, \dots, H_n$ обычно называют **гипотезами**, а числа $P(H_i)$ - вероятностями гипотез.

Пример. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Из этих трех урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым?

Р е ш е н и е . С интересующим нас событием $A = \{\text{из выбранной урны извлечен белый шар}\}$ естественно связать гипотезы H_1, H_2, H_3 о том, что из рассматриваемых трех урн была выбрана первая, вторая, третья урны соответственно. Ясно, что эти гипотезы попарно несовместны и в объединении дают достоверное событие. Кроме того, $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Как мы видим, все условия для применения формулы полной вероятности выполнены. Остается заметить, что $P(A|H_1) = 7/10$, $P(A|H_2) = 2/3$, $P(A|H_3) = 2/15$.

По формуле полной вероятности, получаем: $P(A) = 7/10 \cdot 1/3 + 2/3 \cdot 1/3 + 2/15 \cdot 1/3 = 45/90 = 1/2$

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задача 1. В вычислительной лаборатории имеется шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

Задача 2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразил мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Задача 3. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй – 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой у наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 8

Формула Байеса. Решение задач

Цель: закрепить и проверить знания и умения по нахождению полной вероятности.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Вероятность $P(B)$ появления события B , которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных

событий, т. е. $H_i \cdot H_j \neq \phi, i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n H_i = D$, вычисляется по **формуле полной вероятности**

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(B/H_i), \text{ где } \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1.$$

При этом события $H_1, H_2, \dots, H_n$ обычно называют **гипотезами**, а числа $P(H_i)$ - вероятностями гипотез.

Условная вероятность гипотезы H_i в предположении, что событие B уже имеет место, определяется по формуле Байеса:

$$P(H_i/B) = \frac{P(BH_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(B/H_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Вероятности $P(H_i/B)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют вероятностями гипотез.

Пример. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из трех урн была выбрана первая (вторая, третья) урна?

Решение. Нам предстоит вычислить апостериорные вероятности $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$, $P(H_3|A)$ гипотез H_1, H_2, H_3 относительно события $A = \{\text{из выбранной урны был взят белый шар}\}$. Это — типичная задача на формулу Байеса. Имеем:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Аналогично получим:

$$P(H_2|A) = \frac{4}{9}$$

$$P(H_3|A) = \frac{4}{45}$$

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задача 1. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,98, а вторым – 0,98. Изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

Задача 2. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без нее?

Задача 3. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. При проверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица. (Предполагается, что оба перфоратора были исправны)

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 9

Формула Бернулли. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по формуле Бернулли.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Теория вероятностей имеет дело с такими экспериментами, которые можно повторять, по крайней мере теоретически, неограниченное число раз. Пусть некоторый эксперимент повторяется n раз, причем результаты каждого повторения не зависят от исходов предыдущих повторений. Такие серии повторений часто называют **независимыми испытаниями**. Частным случаем таких испытаний являются независимые испытания Бернулли, которые характеризуются двумя условиями:

- 1) результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов, называемых соответственно «успехом» или «неудачей»;
- 2) вероятность «успеха» в каждом последующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний.

Теорема Бернулли. Если производится серия из n независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых успех появляется с вероятностью p , то вероятность того, что успех в n испытаниях появится ровно m раз, выражается формулой

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{где } q=1-p - \text{где вероятность неудачи.}$$

Эта формула называется формулой Бернулли.

Задача 1. Игральная кость бросается 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».

Решение. Пятикратное бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха («шестерки») равно $1/6$ и вероятностью неудачи — $5/6$. Искомую вероятность найдем по

формуле $P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.053$.

Задача 2. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.

Решение. Искомая вероятность равна сумме трех вероятностей

$$P = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,315.$$

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задачи:

1. Случайным образом называют десять цифр. Какова вероятность того, что цифра 5 встретиться ровно семь раз?
2. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла за некоторое время t равна $p = 0,8$. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за время t откажут 4 узла.
3. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых надо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, совершенно не готовясь к тесту, студенту удастся угадать правильные ответы по крайней мере на 6 вопросов?
4. «Хорошо» если наудачу выбранная карта из 36 – не бубновая. Карту каждый раз возвращают в колоду. Какова вероятность того, что ровно в 5 случаях из 8 таких вытаскиваний будет «плохо»?
5. Вероятность изготовления на станке стандартной детали равна 0,9. Найти вероятность того, что из 6 взятых деталей 5 окажутся стандартными?
6. В коробке 3 детали, вероятность брака для каждой детали равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 10 коробок будет не менее 8 не содержащих бракованных деталей?

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 10

Приближенные формулы в схеме Бернулли

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по формуле Бернулли.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Наивероятнейшее число успехов.

Число m , при котором биномиальные вероятности $P_n(m)$ достигают своего максимального значения (при фиксированном числе испытаний n) называют обычно наиболее вероятным (**наивероятнейшим**) **числом успехов**. Справедливо следующее утверждение о наивероятнейшем числе успехов:

Наивероятнейшее число успехов m^* в серии из n независимых испытаний Бернулли (с вероятностью успеха p в одном испытании) определяется соотношением **$np - q \leq m^* \leq np + p$** , причем

1. если число $np - q$ - дробное, то существует одно наивероятнейшее число m^* ;
2. если число $np - q$ - целое, то существует два наивероятнейших числа $m^* = np - q$, $m^* = np + p$;
3. если np - целое число, то наивероятнейшее число $m^* = np$.

Задача 3. Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадения герба).

Решение. Возможными значениями для числа успехов в 3-х рассматриваемых испытаниях являются $m = 0, 1, 2$ или 3. Пусть A_m - событие, состоящее в том, что при 3-х подбрасываниях монеты герб появится m раз. По формуле Бернулли легко найти вероятности событий A_m (см. таблицу):

m	0	1	2	3
$P_n(m)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Из этой таблицы видно, что наиболее вероятными значениями являются числа 1 и 2 (их вероятности равны 3/8). Этот же результат можно получить и из приведенного выше утверждения.

Задача 4. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна $3/4$. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 10.

Решение. В этом примере $n=10$, $p=3/4=0,75$, $q=1/4=0,25$. Тогда неравенство для наиболее вероятного числа успехов выглядит так:

$$np - q \leq m^* \leq np + p,$$

$$\text{т.е. } 10 \cdot 0,75 - 0,25 \leq m^* \leq 10 \cdot 0,75 + 0,75,$$

$$\text{или } 7,25 \leq m^* \leq 8,25.$$

Существует только одно целое решение этого неравенства, а именно, $m^*=8$.

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради.

Задачи:

1. Бросание кубика считается удачным, если выпадет 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 3 бросания из 7 окажутся удачными?
2. Четыре стрелка один независимо от другого производят по одному выстрелу по общей мишени. Вероятность попадания в мишень для каждого стрелка 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет одна пробоина.
3. На аукционе выставлено 12 лотов. Для каждого лота вероятность быть проданным по максимальной цене равна 0,8. Какова вероятность того, что по максимальной цене будет продано более семи лотов?
4. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла за некоторое время t равна $p = 0,8$. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за время t откажут 6 узлов.
5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.
6. При каждом вкладе инвестиций в промышленные проекты вероятность получения с них прибыли равна 0,7. Определить вероятность того, что из 10 проектов прибыль принесут не меньше 4 предприятий.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 11

Дискретная случайная величина. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН по составлению закона распределения дискретной случайной величины, построению полигона.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Случайная величина X – это числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются **дискретными**.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Дискретная случайная величина может быть задана таблично (ряд распределения), аналитически и графически.

X_1	X_2	...	X_i	...	X_n
P_1	P_2	...	P_i	...	P_n

, где $\sum_{i=1}^n P_i = 1$.

Многоугольник или полигон распределения вероятностей – это ломаная, концы звеньев которой есть точки с координатами (x_i, y_i) , $i \in N$.

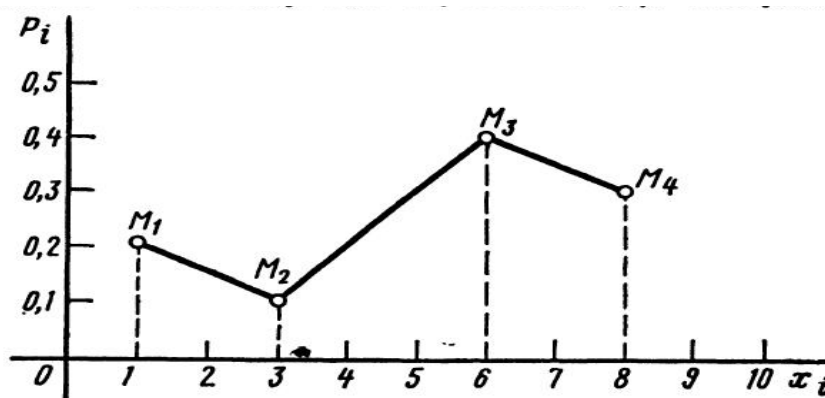
Пример 1. Дискретная случайная величина X заданна законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0.2	0.1	0.4	0.3

Построить многоугольник распределения заданной величины.

Решение: построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i , а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i , т.е. строим точки $M_1(1;0,2), M_2(3;0,1), M_3(6;0,4), M_4(8;0,3)$

Соединив точки, мы получим



многоугольник распределения.

Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради

Задачи:

1. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Составьте ряд распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке. Постройте полигон распределения вероятностей.
2. Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам математический анализ и алгебра, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Постройте многоугольник распределения вероятностей.
3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных и построить многоугольник распределения.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.
Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 12

Непрерывная случайная величина. Решение задач

Цель: закрепить и проверить ЗУН по составлению функции случайной величины и построению ее графика.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Рассматривая для любого x вероятность события $\{X < x\}$, получим некоторую функцию действительной переменной, которая называется *функцией распределения*:

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x :
$$F(x) = P(X < x)$$

Функция распределения однозначно задает распределение случайной величины, так как по ней находятся вероятности вида $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$.

Рассмотрим основные свойства функции распределения.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

Действительно, так как значения функции распределения есть вероятности, то неравенство выполняется.

2. Функция распределения есть монотонно неубывающая функция, $a < b \rightarrow F(a) \leq F(b)$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

4. Функция распределения непрерывна слева.

Можно показать, что любая действительная функция, удовлетворяющая перечисленным выше свойствам, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Пример. Предприятие выпускает изделия, среди которых 60 % стандартных. Наугад выбираются 5 изделий. Найти функцию распределения числа стандартных изделий в выборке.

Решение. Можно считать, что имеются $n = 5$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.6$, тогда $q = 0.4$. Найдем вероятности m успехов ($m = \overline{0,5}$) по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 * 0.6^0 * 0.4^5 = 0.01024; P_5(1) = C_5^1 * 0.6^1 * 0.4^4 = 0.0768;$$

$$P_5(2) = C_5^2 * 0.6^2 * 0.4^3 = 0.2304; P_5(3) = C_5^3 * 0.6^3 * 0.4^2 = 0.3456;$$

$$P_5(4) = C_5^4 * 0.6^4 * 0.4^1 = 0.2592; P_5(5) = C_5^5 * 0.6^5 * 0.4^0 = 0.07776.$$

Тогда:

$$\text{При } x \leq 0, F(x) = P\{m < x\} = 0;$$

$$\text{При } 0 < x \leq 1, F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0\} = 0.01024;$$

$$\text{При } 1 < x \leq 2, F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, m = 1\} = P_5(0) + P_5(1) = 0.08704;$$

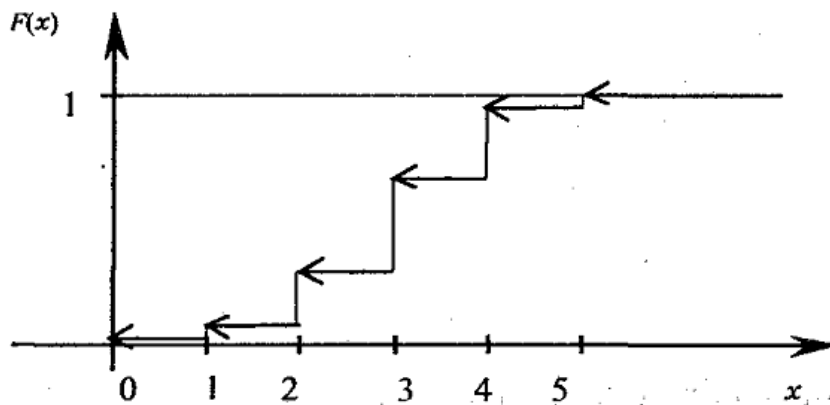
$$\text{При } 2 < x \leq 3, F(x) = P\{m = 0, m = 1, m = 2\} = 0.08704 + P_5(2) = 0.31744;$$

$$\text{При } 3 < x \leq 4, F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, 1, 2, 3\} = 0.31744 + P_5(3) = 0.66304;$$

$$\text{При } 4 < x \leq 5, F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, 1, 2, 3, 4\} = 0.66304 + P_5(4) = 0.92224;$$

$$\text{При } x > 5, F(x) = P\{m < x\} = P\{m = 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = 0.92224 + 0.07776 = 1.$$

График функции $F(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке.



Задание: Решить задачи

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради

Задачи:

1. На связке имеется пять ключей от разных кабинетов. Вынутым ключом пытаются открыть дверь одного из кабинетов. Составить закон распределения случайной величины X - числа попыток открыть дверь. Ключ повторно не используется. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
2. Ведется стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. X - число произведенных выстрелов. $K = 3$. Найти закон распределения случайной величины X . Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \leq K$.
3. Вероятность попадания в мишень для спортсмена при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий, если спортсмен сделал три выстрела. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, решение задач.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задачи решены верно.

Оценка «4» - все задачи решены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задачи решены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задачи решены не верно.

Практическая работа № 13

Числовые характеристики НСВ

Цель: закрепить и проверить ЗУН по вычислению числовых характеристик функции распределения.

Продолжительность занятия: 2 часа

Краткая теория

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1) математическое ожидание: $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$;

2) дисперсия: $D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 p(x) dx$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x), \quad M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx, \quad M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x) dx.$$

3) среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Пример.

Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

Найти

- 1) плотность распределения;
- 2) математическое ожидание, дисперсию случайной величины X.

Решение

1) $p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

2) $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9} dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx = \frac{2x^3}{27} \Big|_0^3 = \frac{2 \cdot 3^3}{27} = 2$

$M(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2x}{9} dx + \int_3^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^3 dx = \frac{2x^4}{9 \cdot 4} \Big|_0^3 = \frac{2 \cdot 3^4}{36} = 4,5$

$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 4,5 - 2^2 = 0,5$

Ответ: $p(x)$; 2; 0,5.

Задание: Выполнить задания

Порядок и методика выполнения заданий:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Оформить решение задач в тетради

Задание.

Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$; Найдите значение постоянной величины C и постройте

график функции $F(x)$. Определить плотность распределения $f(x)$ и построить ее график. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое

отклонение и вероятность попадания случайной величины X на заданный участок значений $P(0,5 \leq X < 1)$.

Отчет по практической работе оформляется в тетради для практических работ и содержит название практической работы, выполнение заданий.

Критерии оценивания

Оценка «5» - все задания выполнены верно.

Оценка «4» - все задания выполнены верно, но допущены неточности или несущественные ошибки.

Оценка «3» - все задания выполнены, но допущены существенные ошибки и неточности.

Оценка «2» - все задания выполнены не верно.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Спирина М. С., Спирин П. А. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач – М.: Издательский центр «Академия», 2014.
2. Спирина М. С., Спирин П. А. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Издательский центр «Академия», 2013.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: КноРус, 2010.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юрайт, 2011.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Юрайт, 2011.
6. Гусак А. А., Бричикова Е. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – М.: ТетраСистемс, 2009.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: – М.:Юнити-Дана, 2010.
8. Мхитарян В. С., Шишов В. Ф., Козлов А. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Академия, 2012.
9. Прохоров Ю. В., Пономаренко Л. С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Издательство МГУ, 2012.